Travail d'été pré-ECG1

Chers futur(e)s étudiant(e)s,

Félicitations pour votre admission en classe préparatoire ECG au Lycée Pothier.

Les mathématiques occuperont une place importante dans vos deux années de préparation. Afin d'aborder sereinement la première année, il est important que vous soyez le plus à l'aise possible avec les mathématiques que vous avez étudiées au lycée, et notamment avec le calcul : l'expérience montre que l'un des principaux obstacles rencontrés par les étudiants de première année est leur manque de familiarité avec les règles élémentaires de calcul littéral (fractions, puissances, etc.) et avec les fonctions usuelles (courbes, exponentielle et ln, dérivées). Il faut donc que vous combliez les lacunes que vous pourriez avoir dans ces domaines.

À cet effet, nous vous avons préparé un cahier d'été. Vous y trouverez des rappels et des exercices sur les thèmes suivants :

Nous vous encourageons fortement à faire ces exercices durant l'été. Des interrogations portant sur ces thèmes auront lieu à partir de la rentrée. Un corrigé des exercices est disponible à partir de la page 32.

Vos professeurs de mathématiques,
J. Braud et V. Marx

Thème 1 : Les fractions

La définition d'une fraction

Définition. Soient x un nombre réel et y un nombre réel **non nul**. La fraction $\frac{x}{y}$ est le résultat de la division de x par y. Le nombre x est appelé *numérateur* de la fraction et le nombre y est appelé *dénominateur* de la fraction.

Exemple. Le nombre 9 est le dénominateur de la fraction $\frac{2}{9}$. Le nombre 2 en est le numérateur.

Remarque. Il est important que y soit différent de 0 dans la définition, car on ne divise jamais par 0.

Exemple. 1000 personnes ont répondu à une enquête. 574 y ont répondu par « oui ». La fraction des personnes ayant répondu « oui » à l'enquête vaut donc $\frac{574}{1000}$. C'est un nombre compris entre 0 et 1 ; plus précisément, $\frac{574}{1000} = 0{,}574$.

Notation. Comme dans l'exemple ci-dessus, le trait de fraction doit toujours se trouver en face du signe $=$.
⚠ Ne jamais écrire des choses du type $\underline{574}_{1000} = 0{,}574$, car le signe $=$ n'est pas aligné avec le trait de fraction.

Simplifier une fraction

Pour simplifier une fraction :

- soit on multiplie le numérateur et le dénominateur par le **même** nombre **non nul** ;
- soit on divise le numérateur et le dénominateur par le **même** nombre **non nul**.

Remarque. Comme diviser par x revient à multiplier par $\frac{1}{x}$, les deux méthodes présentées ci-dessus sont équivalentes.

Exemple. Simplifier $\frac{49}{21}$.

$\hookrightarrow$ On remarque que les deux nombres 49 et 21 sont dans la même table de multiplication : la table de 7.

$$\frac{49}{21} = \frac{7 \times \cancel{7}}{3 \times \cancel{7}} = \boxed{\frac{7}{3}}.$$

« Barrer 7 », cela signifie qu'on a divisé le numérateur et le dénominateur par 7 (ou de manière équivalente, qu'on a multiplié le numérateur et le dénominateur par $\frac{1}{7}$).

Exemple. Soit $x \neq 0$. Simplifier la fraction $\frac{x^3}{x}$.

$\hookrightarrow$ On remarque que $x^3 = x^2 \times x$. On en déduit que $\frac{x^3}{x} = \frac{x^2 \times x}{x}$. On voit que le facteur x apparaît à la fois au numérateur et au dénominateur. On peut « barrer » les deux x, car x

est un nombre non nul : $\dfrac{x^3}{x} = \dfrac{x^2 \times \cancel{x}}{\cancel{x}} = \dfrac{x^2}{1} = x^2$. Une autre manière de faire (qui revient au même) est de multiplier numérateur et dénominateur par $\dfrac{1}{x}$:

$$\frac{x^3}{x} = \frac{x^2 \times x}{x} = \frac{x^2 \times x \times \frac{1}{x}}{x \times \frac{1}{x}} = \frac{x^2}{1} = \boxed{x^2}.$$

Exemple. Soit $x \neq 0$. Simplifier $\dfrac{x^5}{x^9}$.

$$\hookrightarrow \quad \frac{x^5}{x^9} = \frac{x^5}{x^{5+4}} = \frac{\cancel{x^5}}{\cancel{x^5} \times x^4} = \boxed{\frac{1}{x^4}}.$$

Multiplier des fractions

L'opération la plus simple entre deux fractions est la **multiplication**. Si a, b, c et d sont quatre nombres réels, b et d étant non nuls, alors $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d} = \dfrac{ac}{bd}$.

Exemple. $\dfrac{12}{15} \times \dfrac{5}{24} = \dfrac{12 \times 5}{15 \times 24} = \dfrac{60}{360} = \dfrac{6}{36} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

Astuce. On peut mener le calcul ci-dessus de manière plus judicieuse. Le bon réflexe à prendre, c'est de vérifier - avant de multiplier - si on ne peut pas simplifier auparavant. Ici, on remarque que 24 est égal à 2×12 et que 15 est égal à 3×5 :

$$\frac{12}{15} \times \frac{5}{24} = \frac{12 \times 5}{15 \times 24} = \frac{\cancel{12} \times \cancel{5}}{3 \times \cancel{5} \times 2 \times \cancel{12}} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}.$$

Ça évite de faire des multiplications compliquées et diminue le risque d'erreurs de calculs !

Additionner et soustraire des fractions

Pour **additionner** deux fractions, on doit d'abord mettre les deux fractions au même dénominateur : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} + \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad+bc}{bd}$.

Exemple. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2 \times 4}{3 \times 4} + \dfrac{3 \times 1}{3 \times 4} = \dfrac{8}{12} + \dfrac{3}{12} = \boxed{\dfrac{11}{12}}$.

L'opération de **soustraction** de deux fractions s'effectue comme l'addition.

Exemple. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2 \times 4}{3 \times 4} - \dfrac{3 \times 1}{3 \times 4} = \dfrac{8}{12} - \dfrac{3}{12} = \boxed{\dfrac{5}{12}}$.

Et la division...

Diviser par la fraction $\dfrac{a}{b}$ revient à multiplier par la fraction inverse $\dfrac{b}{a}$. On va voir plusieurs exemples dans le paragraphe suivant.

Quand on a plusieurs traits de fractions...

Parfois, on a plusieurs traits de fractions superposés. Il y a toujours un trait de fraction principal. On le repère facilement car c'est celui qui se trouve en face du signe = (d'où l'importance d'écrire le = en face du trait de fraction) et il est un peu plus large que les traits de fraction secondaires.

Exemple. Soit $x = \dfrac{5}{\frac{2}{3}}$. Simplifier x.

$\hookrightarrow$ Cela signifie que 5 est divisé par la fraction $\dfrac{2}{3}$. Cela revient donc à multiplier 5 par la fraction inverse $\dfrac{3}{2}$. Ainsi, $x = \dfrac{5}{\frac{2}{3}} = 5 \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{1} \times \dfrac{3}{2} = \boxed{\dfrac{15}{2}}$.

Remarque. Une manière équivalente de mener le calcul est de multiplier numérateur et dénominateur par $\dfrac{3}{2}$: $x = \dfrac{5}{\frac{2}{3}} = \dfrac{5 \times \frac{3}{2}}{\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{15}{2}}{1} = \dfrac{15}{2}$.

Exemple. Soit $y = \dfrac{\frac{5}{2}}{3}$. Cela signifie que $\dfrac{5}{2}$ est divisé par 3. Cela revient à multiplier $\dfrac{5}{2}$ par $\dfrac{1}{3}$. Ainsi, $y = \dfrac{\frac{5}{2}}{3} = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{5}{6}}$.

Remarque. L'importance de bien aligner le trait de fraction principal est ici cruciale. En effet, les deux calculs ci-dessus montrent que $\dfrac{5}{\frac{2}{3}}$ et $\dfrac{\frac{5}{2}}{3}$ ne sont pas égaux !

Fractions et parenthèses

Savoir placer les parenthèses au bon endroit est essentiel pour tout calcul en mathématiques. En ce qui concerne plus particulièrement les fractions, prenons les deux exemples suivants.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$. Calculer $\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x+1}$.

$\hookrightarrow$ $\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x(x+1)} = \boxed{\dfrac{1}{x^2+x}}$. Il est indispensable de ne pas oublier la parenthèse autour de $x+1$ dans ce calcul. En effet, lorsqu'on multiplie les deux fractions, on doit multiplier les deux dénominateurs x et $x+1$ entre eux. Or la multiplication de x par $x+1$ est égale à $x(x+1)$ et non à $x \times x + 1$. Pour se convaincre de cette dernière phrase, regardons ce qui se passe lorsque x est égal à 2. Multiplier x par $x+1$ signifie donc multiplier 2 par 3, ce qui donne 6. Or

$$\begin{aligned} x(x+1) &= 2 \times (2+1) = 2 \times 3 = 6 & &\longrightarrow \text{c'est correct} \\ x \times x + 1 &= 2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5 & &\longrightarrow \text{c'est faux.} \end{aligned}$$

Remarque. L'hypothèse $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$ signifie que le calcul doit s'appliquer pour tout nombre réel x différent de -1 et différent de 0. On exclut 0 car si x vaut 0, la fraction $\frac{1}{x}$ n'est pas définie. On exclut -1 car si x vaut -1, la fraction $\frac{1}{x+1}$ n'est pas définie.

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Calculer $\dfrac{x+2}{x^2} \times 3$.

$$\hookrightarrow \quad \frac{x+2}{x^2} \times 3 = \frac{x+2}{x^2} \times \frac{3}{1} = \frac{(x+2)\times 3}{x^2} = \boxed{\frac{3x+6}{x^2}}.$$

Remarque. On peut aussi continuer de développer et donner la réponse suivante, qui est équivalente : $\dfrac{3x+6}{x^2} = \dfrac{3x}{x^2} + \dfrac{6}{x^2} = \boxed{\dfrac{3}{x} + \dfrac{6}{x^2}}$.

Montrer une égalité

Par exemple, on veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3(x+1) - 4 = 3(x - \frac{1}{3})$. Il y a trois méthodes :

Méthode A. On part du membre de gauche et par un succession d'égalités, on parvient au membre de droite :

$$3(x+1) - 4 = 3x + 3 - 4 = 3x - 1 = 3(x - \tfrac{1}{3}).$$

Méthode B. On part du membre de droite et par un succession d'égalités, on parvient au membre de gauche :

$$3(x - \tfrac{1}{3}) = 3x - 1 = 3x + 3 - 4 = 3(x+1) - 4.$$

Méthode C. On calcule séparément chacun des deux termes et on montre que les résultats sont les mêmes :

$$\begin{gathered} 3(x+1) - 4 = 3x + 3 - 4 = 3x - 1 \\ 3(x - \tfrac{1}{3}) = 3x - 1 \\ \text{donc } 3(x+1) - 4 = 3(x - \tfrac{1}{3}). \end{gathered}$$

Ici, les trois méthodes sont assez proches. Mais parfois, une méthode est clairement plus rapide que les deux autres. C'est pourquoi, quand on est bloqué dans le calcul, il faut penser à la possibilité de passer à une des autres méthodes.

. . . .

Exercices

Tous les exercices sont à faire sans calculatrice.

Exercice 1. Simplifier les fractions suivantes :

$$A = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{7}} \qquad B = \frac{1}{\frac{3}{4}} \qquad C = \frac{\frac{4}{5}}{2}$$

$$D = \frac{1344}{111} \times \frac{888}{2688} \qquad E = \frac{\frac{4}{3} + 1}{\frac{2}{7}} \qquad F = \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{24} + \frac{1}{12}\right).$$

Exercice 2. Démontrer pour tout entier naturel n les trois égalités suivantes :

a) $\dfrac{3n(n^2+1) - 3n}{9} = \dfrac{n^3}{3}$.

b) $\dfrac{n^2+2n-15}{7} = \dfrac{(n+5)(n-3)}{7}$.

c) $\dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Exercice 3. Votre camarade de classe a écrit sur son cahier :

$$\frac{3x+2}{3} = \frac{\cancel{3}x+2}{\cancel{3}} = x+2.$$

Expliquez-lui pourquoi son calcul est faux.

Exercice 4. Soit x un nombre réel positif. Calculer $\dfrac{\dfrac{5x+21}{x^2+6x+5}}{\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{1}{x+5}}$.

Exercice 5. Soit x un nombre réel non nul. Simplifier

$$A = \frac{x^4}{x} \qquad B = \frac{x^3}{x^7} \qquad C = \frac{x^5+x^2}{x^2} \qquad D = \frac{x+x^4}{x}.$$

Exercice 6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Simplifier

$$A = \frac{1+n}{n^2} \times n \qquad B = \frac{n+7}{n-1} \times \frac{n-7}{n+1} \qquad C = \frac{\dfrac{n-1}{n}}{\dfrac{n-1}{n^3}}.$$

Thème 2 : Les racines carrées

La définition de la racine carrée

Définition. Soit x un nombre réel.
Si $x < 0$, la racine carrée de x n'est pas définie (elle n'existe pas).
Si $x \geqslant 0$, *la racine carrée de* x est l'unique nombre réel <u>positif</u> a tel que $a^2 = x$.
On la note $\sqrt{x}$.

Autrement dit, la racine carrée de x est le nombre positif qui, lorsqu'il est mis au carré, donne x.
Exemple. $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$. En revanche, $\sqrt{-9}$ n'existe pas.

Remarque. Le mot *positif* est important dans la définition. En effet, il n'y a pas unicité du nombre réel a tel que $a^2 = x$ si on ne suppose pas a positif. Par exemple, l'équation $a^2 = 9$ admet deux solutions ($a = 3$ et $a = -3$) dont une seule est positive.

Conséquence de la définition. Pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$. Autrement dit, une racine carrée est toujours positive.
Les racines carrées suivantes sont à connaître par cœur :

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{2} \simeq 1{,}4$	$\sqrt{3} \simeq 1{,}7$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{10000} = 100$

Les formules à connaître sur les racines carrées

Les formules suivantes sont à connaître par coeur. Pour mieux les retenir, commencez par bien les comprendre en lisant les commentaires et en faisant quelques exercices, puis apprenez-les par cœur dans un second temps.

i) pour tout $x \in [0, +\infty[$, $(\sqrt{x})^2 = x$.
ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
iii) pour tous $x, y \in [0, +\infty[$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.
iv) pour tout $x \in [0, +\infty[$ et pour tout $y \in]0, +\infty[$, $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.
v) il n'y a **pas de formule** pour $\sqrt{x + y}$ ni pour $\sqrt{x - y}$.

Commentaires sur les formules.
i) Cela découle directement de la définition (remplacer a par $\sqrt{x}$). Il est important de retenir également l'hypothèse : x doit appartenir à $[0, +\infty[$ pour que la formule ait un sens, sinon $\sqrt{x}$ n'est pas défini.
ii) Intuitivement, on est tenté d'écrire $\sqrt{x^2} = x$. C'est correct si x est positif, mais c'est faux si x est négatif. Prenons un exemple pour le vérifier : $x = -2$. Alors $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. On en déduit que $\sqrt{x^2}$ n'est pas égal à x, mais est égal à $-x$. On remarque que :

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Or *la valeur absolue de* x est précisément définie par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Donc $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
iii) on suppose que x et y sont positifs car sinon, $\sqrt{x}$ ou $\sqrt{y}$ ne seraient pas bien définis.
iv) on suppose de plus que y est **strictement** positif, car si y était nul, la division par 0 poserait problème !
v) la formule $\cancel{\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}}$ est évidemment fausse. Pour prouver que c'est faux, il suffit de trouver un contre-exemple. Prenons $x = 1$ et $y = 1$. Alors

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$$
$$\sqrt{x+y} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Or $2 \neq \sqrt{2}$, donc la formule est fausse.

L'expression conjuguée

La méthode de l'expression conjuguée est utilisée pour simplifier une fraction où, au dénominateur, on trouve une expression du type $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (1er cas) ou du type $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (2nd cas). La méthode consiste alors à multiplier numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (dans le 1er cas) ou $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (dans le 2nd cas), dans le but d'utiliser l'identité remarquable $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

Exemple. Simplifier la fraction $\dfrac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$.
étape 1 : on identifie $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ au dénominateur. Son expression conjuguée est $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.
étape 2 : on multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

$$\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$

étape 3 : on multiplie les deux fractions.

$$\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}$$

étape 4 : on utilise l'identité remarquable pour simplifier le dénominateur.

$$(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3.$$

étape 5 : on conclut le calcul.

$$\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3} = \boxed{\sqrt{5} + \sqrt{2}}.$$

Exemple. Simplifier $\dfrac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{8}}$.

$$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{(\sqrt{7} + \sqrt{8})(\sqrt{7} - \sqrt{8})} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{7 - 8} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{8}}{-1} = -(\sqrt{7} - \sqrt{8}) = \boxed{\sqrt{8} - \sqrt{7}}.$$

Exercices

Exercice 7.

a) Donner un exemple d'un nombre réel x qui vérifie $\sqrt{x^2} = x$.

b) Donner un exemple d'un nombre réel x qui vérifie $\sqrt{x^2} = -x$.

Exercice 8. Soit n un entier strictement positif. Simplifier

$$A = \sqrt{n^6} \qquad B = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^5}} \qquad C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}.$$

Exercice 9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n^4 + n^8} = n^2\sqrt{1 + n^4}.$$

Exercice 10. Soit $x \in]0, +\infty[$. Simplifier

$$A = \frac{3}{\sqrt{14} + \sqrt{5}} \qquad B = \frac{4x}{\sqrt{2x} - \sqrt{x}}.$$

Exercice 11. Montrer que pour tous $x, y \in [0, +\infty[$,

$$\sqrt{x + y} = \sqrt{x}\,\sqrt{1 + \frac{y}{x}}.$$

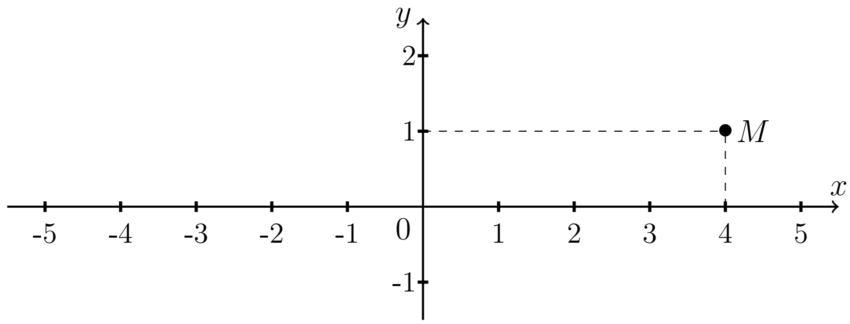
Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier

$$A = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}.$$

Thème 3 : Les courbes

Dans un plan, on considère un repère orthonormé, c'est-à-dire un repère dont les deux axes sont perpendiculaires et sont gradués avec la même échelle. Un point M est alors repéré par deux nombres (x, y), appelés *coordonnées de* M, où x désigne *l'abscisse* de M et y *l'ordonnée* de M.

Exemple. Ci-dessous, M est le point de coordonnées $(4, 1)$. 4 est l'abscisse et 1 est l'ordonnée.

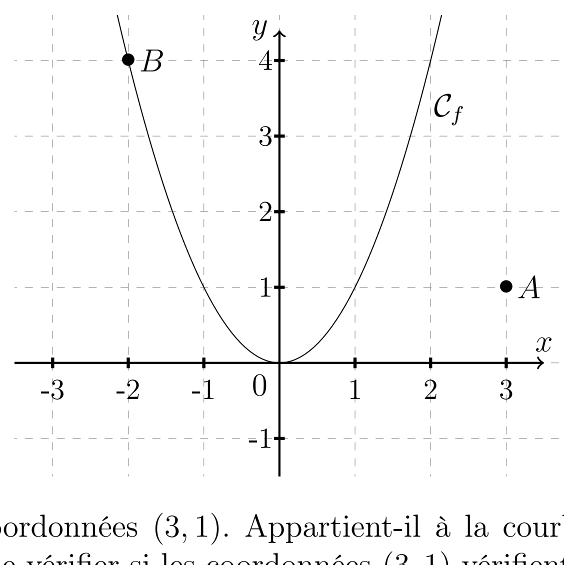


Courbe d'équation $y = f(x)$

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ce qui veut dire que f est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition. La *courbe représentative* de f, généralement notée $\mathcal{C}_f$, est la courbe d'équation $y = f(x)$. En d'autres termes, $\mathcal{C}_f$ est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) qui sont solutions de l'équation $y = f(x)$.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$, est la courbe d'équation $\boxed{y = x^2}$. Son graphique est le suivant :

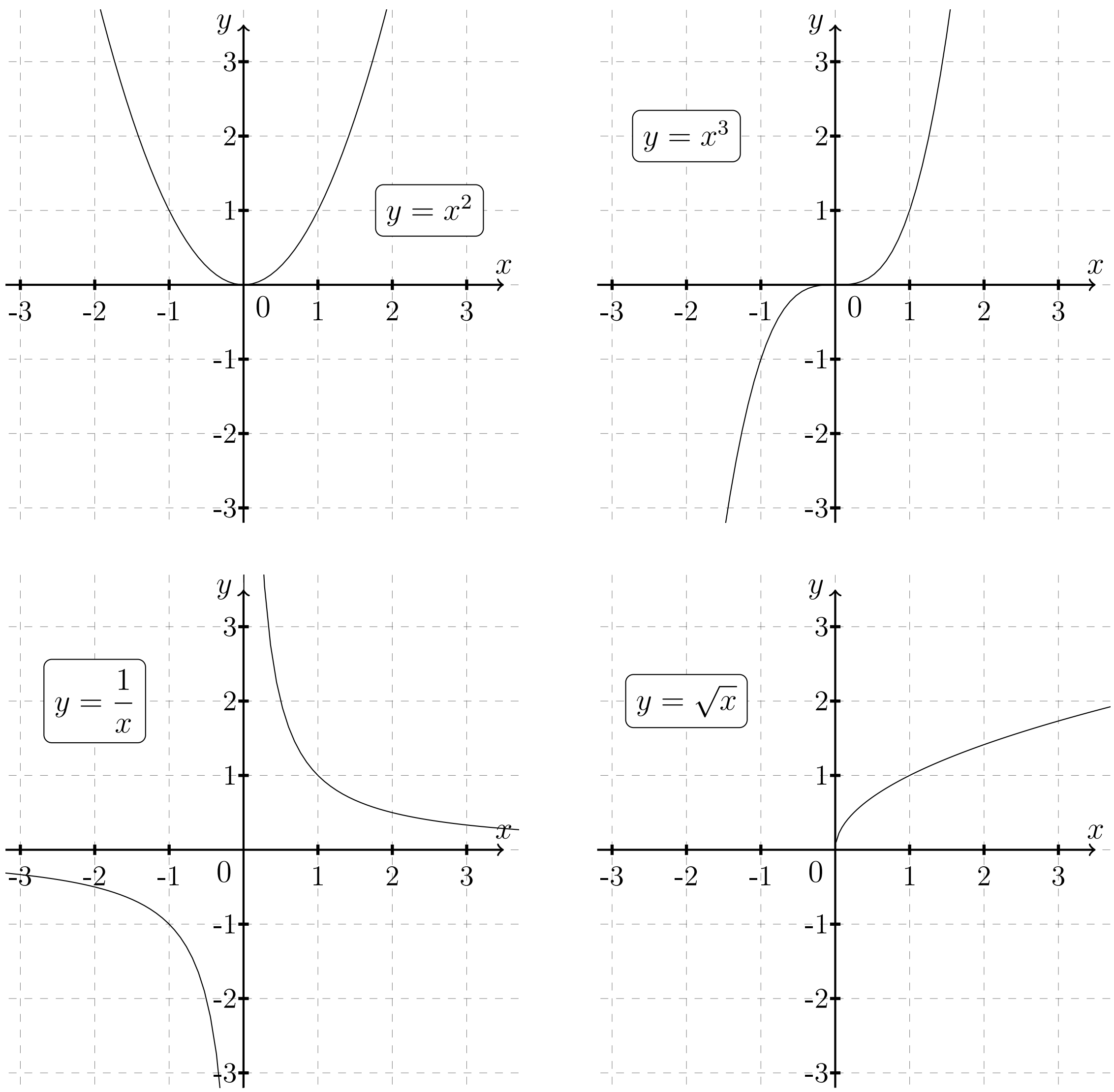


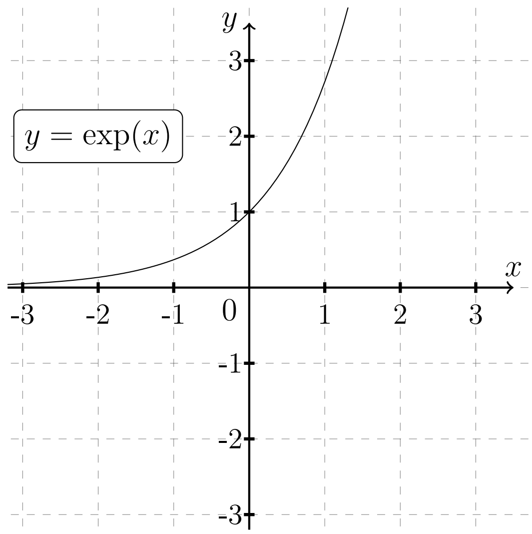
Prenons le point A de coordonnées $(3, 1)$. Appartient-il à la courbe $\mathcal{C}_f$? Comme $\mathcal{C}_f$ a pour équation $y = x^2$, il suffit de vérifier si les coordonnées $(3, 1)$ vérifient l'équation $y = x^2$. Or si x vaut 3 et y vaut 1, $x^2 = 9$ donc $y \neq x^2$: A n'appartient pas à $\mathcal{C}_f$.
En revanche, le point B de coordonnées $(-2, 4)$ appartient à $\mathcal{C}_f$. En effet, si $x = -2$ et $y = 4$, $x^2 = (-2)^2 = 4$ donc $y = x^2$.

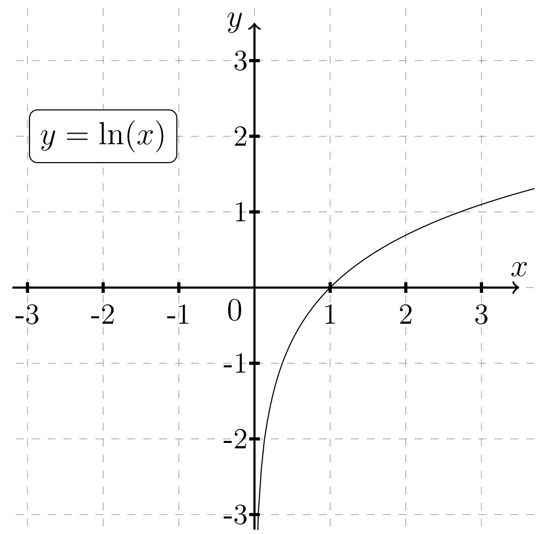
Bilan. Sur le graphique précédent, tous les points qui se trouvent sur la courbe ont des coordonnées (x, y) qui satisfont l'équation $y = x^2$, tandis que tous les points qui ne sont pas sur la courbe ont des coordonnées qui ne vérifient pas cette équation.
Remarque. Ne jamais écrire : « la courbe x^2 ». Une courbe est toujours définie par une *équation*, et une équation comporte toujours le signe $=$.
On doit donc écrire : « la courbe d'équation $y = x^2$ ».

Les courbes représentatives des fonctions usuelles

L'allure de la courbe d'équation $y = x^2$, tracée précédemment, ainsi que celle des courbes ci-dessous est à connaître.







Commentaires sur les graphiques.

- $\boxed{y = x^2}$: c'est une parabole passant par les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Elle possède une tangente horizontale en 0.
- $\boxed{y = x^3}$: courbe qui passe par les points $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$, symétrique par rapport à l'origine. Elle possède une tangente horizontale en 0.
- $\boxed{y = \frac{1}{x}}$: courbe définie pour $x \neq 0$. Elle est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, 0)$ et passe par les points $(-1, -1)$ et $(1, 1)$.
- $\boxed{y = \sqrt{x}}$: courbe définie pour $x \geqslant 0$. Elle passe par $(0, 0)$ et $(1, 1)$ et possède une tangente verticale en 0.
- $\boxed{y = \exp(x)}$: courbe toujours strictement au-dessus de l'axe des abscisses. Elle passe par le point $(0, 1)$.
- $\boxed{y = \ln(x)}$: courbe définie pour $x > 0$. Elle passe par $(1, 0)$.

Les équations de droite

Exemple. Considérons la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x = 0$. Que représente-t-elle ?

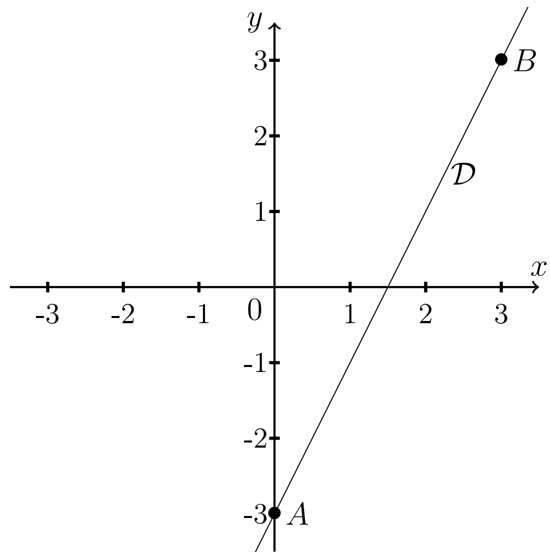
$\hookrightarrow$ Un point A de coordonnées (x, y) appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si son abscisse x vaut 0. Or un point a une abscisse nulle si et seulement si ce point se trouve sur l'axe des ordonnées. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}$ est $\boxed{\text{l'axe des ordonnées}}$.

Exemple. De même, la courbe d'équation $y = 0$ représente l'axe des abscisses.

Proposition. Toute droite non verticale admet une équation de type $y = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.
a est appelé *coefficient directeur* de la droite. b est appelé *ordonnée à l'origine* de la droite.

Exemple. Tracer la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 3$.

$\hookrightarrow$ La méthode est assez simple : il suffit de trouver deux points qui appartiennent à $\mathcal{D}$ et de les relier par une droite. Déterminons un premier point A de la droite $\mathcal{D}$. Choisissons (de manière arbitraire) son abscisse : $x = 0$ par exemple. Pour que A soit sur la droite, il faut donc que $y = 2 \times 0 - 3$, donc $y = -3$. Le point A de coordonnées $(0, -3)$ appartient donc à $\mathcal{D}$. Choisissons ensuite un point B d'abscisse 3. Pour que B soit sur la droite, il faut que son ordonnée y vérifie $y = 2 \times 3 - 3$, donc $y = 3$. Le point B de coordonnées $(3, 3)$ appartient donc à $\mathcal{D}$. On obtient donc la droite suivante :



Remarque. L'*ordonnée à l'origine* de $\mathcal{D}$ vaut -3. Graphiquement, cela signifie que la droite coupe l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée égale à -3 (c'est le point A sur le dessin).
Le *coefficient directeur* de $\mathcal{D}$ vaut 2. Graphiquement, cela signifie que si on prend deux points A et B distincts sur la droite, et qu'on calcule le rapport $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, on obtient 2 :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - (-3)}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2.$$

Exemple. Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(-2, 4)$ et $B(3, 6)$.

$\hookrightarrow$ Comme c'est une équation de droite non verticale (les deux points ayant des abscisses différentes), elle est de la forme $y = ax + b$.
Le point $A(-2, 4)$ appartient à $\mathcal{D}$, donc $4 = -2a + b$.
Le point $B(3, 6)$ appartient à $\mathcal{D}$, donc $6 = 3a + b$.
On a deux équations, on résout donc le système :

$$\begin{cases} 4 = -2a + b \\ 6 = 3a + b \end{cases} \iff \begin{cases} 4 = -2a + b \\ b = 6 - 3a \end{cases} \iff \begin{cases} 4 = -2a + 6 - 3a \\ b = 6 - 3a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2 = -5a \\ \quad b = 6 - 3a \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{2}{5} \\ b = 6 - 3a \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = \frac{24}{5} \end{cases}$$

L'équation de la droite $\mathcal{D}$ est donc $\boxed{y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{24}{5}}$.

Zones du plan

Exemple. Colorier la zone $\mathcal{Z}$ du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient l'inégalité $y \leqslant x^2$.

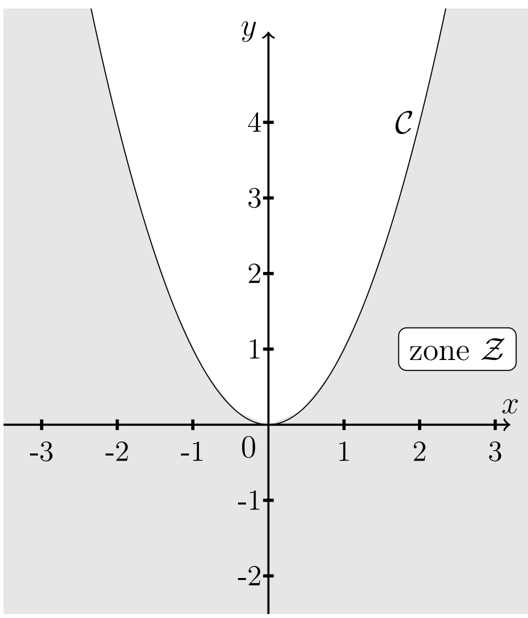
$\hookrightarrow$ On commence par tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = x^2$. La zone $\mathcal{Z}$ correspond à l'ensemble des points se situant en-dessous de la courbe $\mathcal{C}$. On obtient la zone coloriée ci-dessous.

Exemple. Colorier la zone $\mathcal{Z}$ du plan vérifiant l'inégalité $3x + 2y > 1$.

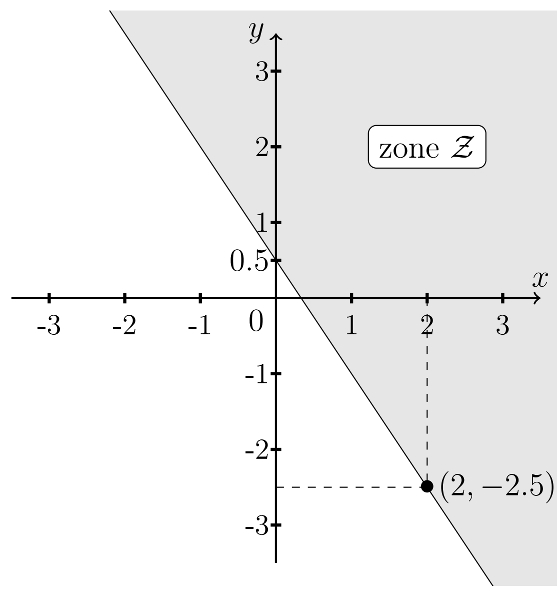
$\hookrightarrow$ On transforme l'inégalité :

$$3x + 2y > 1 \iff 2y > 1 - 3x \iff y > \frac{1-3x}{2} \iff y > -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

On trace ensuite la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Elle passe par les points de coordonnées $(0, 0.5)$ et $(2, -2.5)$. La zone $\mathcal{Z}$ correspond à l'ensemble des points situés strictement au-dessus de la droite.



Graphique du premier exemple



Graphique du second exemple

. . . .

Exercices

Exercice 13. On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \sqrt{3 + x^2}$. Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à $\mathcal{C}$ et lesquels n'y appartiennent pas ?

$A(0, 3)$ $\qquad B(-1, 2)$ $\qquad C(3, 2\sqrt{3})$ $\qquad D(-2, \sqrt{5})$.

Exercice 14. Colorier la zone $\mathcal{Z}$ du plan vérifiant $y \leqslant \exp(x)$.

Exercice 15.

a) Tracer la courbe d'équation $y = -2x - 3$.

b) Tracer la courbe d'équation $y = 4x + 1$.

c) Tracer la courbe d'équation $x = 7$.

Exercice 16. Tracer la courbe d'équation $y = x^2 + 2$.

Exercice 17. Colorier la zone $\mathcal{Z}$ du plan vérifiant $x + 3y < 6$.

Exercice 18. Colorier la zone $\mathcal{Z}$ du plan vérifiant simultanément $x \geqslant 0$ et $-\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

Thème 4 : Les inégalités

Savoir travailler correctement avec les inégalités est une compétence essentielle à acquérir et à consolider cette année. Le plus simple est l'addition d'inégalités. La multiplication est plus piégeuse, il faut être très vigilant. Pour les autres opérations, on utilise la croissance ou la décroissance de fonctions usuelles.

Addition d'inégalités

Commençons par un exemple : prenons l'inégalité $x \leqslant 4$. Il est possible d'ajouter (ou de soustraire) le **même** nombre de chaque côté de l'inégalité. Par exemple, en ajoutant 6 de chaque côté, on obtient

$$x \leqslant 4 \quad \Longrightarrow \quad x + 6 \leqslant 10.$$

Remarque. L'opération $x \leqslant 4 \iff x + 6 \leqslant 10$ est une équivalence (on écrit $\iff$). Cela signifie que

- l'implication $x \leqslant 4 \Longrightarrow x + 6 \leqslant 10$ est vraie : si $x \leqslant 4$, alors on en déduit que $x + 6 \leqslant 10$ en ajoutant 6 des deux côtés ;
- l'implication $x \leqslant 4 \Longleftarrow x + 6 \leqslant 10$ est vraie : si $x + 6 \leqslant 10$, alors on en déduit que $x \leqslant 4$ en soustrayant 6 des deux côtés.

On peut aussi ajouter deux inégalités entre elles, tant qu'elles sont dans le même sens. Voici deux exemples :

$$\begin{cases} x < 4 \\ y < 11 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x + y < 15.$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} \geqslant x^2 \\ 2x \geqslant x^3 + 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} + 2x \geqslant x^2 + x^3 + 4.$$

Remarque. Attention, les implications réciproques sont cette fois-ci fausses. Pour affirmer que $x + y < 15 \Longrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ y < 11 \end{cases}$ est fausse, on peut donner le contre-exemple $x = 12$ et $y = 1$. En effet, lorsque $x = 12$ et $y = 1$, l'inégalité $x + y < 15$ est vraie, mais $x < 4$ est fausse.

Multiplication d'inégalités

Prenons l'inégalité $x \leqslant y$. On peut multiplier chaque côté par un **même** nombre réel c, mais il faut être plus vigilant que pour l'addition :

* si c est positif, on ne change pas le sens de l'inégalité :

$$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad cx \leqslant cy.$$

* si c est négatif, on renverse le sens de l'inégalité :

$$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad cx \geqslant cy.$$

Exemple. Une multiplication par 4 <u>ne change pas</u> le sens de l'inégalité :

$$x^2 \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad 4x^2 \leqslant 4.$$

Exemple. Une multiplication par -1 <u>change</u> le sens de l'inégalité :

$$y > 3 \quad \Longrightarrow \quad -y < -3.$$

Exemple. Une multiplication par -3 <u>change</u> le sens de l'inégalité :

$$\sqrt{x} \leqslant 7 \quad \Longrightarrow \quad -3\sqrt{x} \geqslant -21.$$

Remarque. Toutes ces opérations sont des équivalences. Par exemple, il suffit de multiplier par $\frac{1}{4}$ l'inégalité $4x^2 \leqslant 4$ pour obtenir :

$$4x^2 \leqslant 4 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \leqslant 1.$$

On peut aussi multiplier deux inégalités entre elles, là aussi en étant plus vigilant que pour l'addition.

Si a, b, c et d sont des nombres réels **tous positifs**, alors

$$\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad ac \leqslant bd.$$

Exemple. Supposons que x et y soient positifs. Alors

$$\begin{cases} x \leqslant 4 \\ y \leqslant 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad xy \leqslant 8.$$

Remarque. Sans l'hypothèse sur la positivité de x et y, l'implication ci-dessus est fausse. Voici un contre-exemple : $x = -10$, $y = -1$. Les deux inégalités $x \leqslant 4$ et $y \leqslant 2$ sont bien satisfaites, mais xy vaut 10 donc $xy \leqslant 8$ est faux.

Exemple. Soient x et y deux nombres négatifs. Alors

$$\begin{cases} x \leqslant -2 \\ -3 \leqslant y \end{cases} \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} -x \geqslant 2 \\ 3 \geqslant -y \end{cases} \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad -3x \geqslant -2y.$$

L'implication (1) est vraie par multiplication par -1 de chaque inégalité. L'implication (2) est vraie car 2, 3, $-x$ et $-y$ sont quatre nombres positifs.

Fonctions croissantes, fonctions décroissantes

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

* On dit que f est *croissante sur I* si : $\forall x, y \in I,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)$.
* On dit que f est *décroissante sur I* si : $\forall x, y \in I,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant f(y)$.
* On dit que f est *strictement croissante sur I* si : $\forall x, y \in I,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y)$.
* On dit que f est *strictement décroissante sur I* si : $\forall x, y \in I,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)$.

En bref, « fonction croissante » : on conserve le sens de l'inégalité.
« fonction décroissante » : on renverse le sens de l'inégalité.

Monotonie des fonctions usuelles. On doit connaître la monotonie de chacune de ces fonctions (y compris l'intervalle sur lequel cela s'applique). Si on connaît bien les courbes des fonctions usuelles, la monotonie de ces fonctions est facile à retenir.

* La fonction $x \mapsto x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
* La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
* La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
* La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
* La fonction $x \mapsto \exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
* La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
* La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. *Attention, elle n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*

Exemple. Montrer que pour tout $x \in\ ]-\infty, 0],\ \exp(x) \leqslant 1$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in\ ]-\infty, 0]$. Cela signifie que $x \leqslant 0$.
On en déduit que $\exp(x) \leqslant \exp(0)$ car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$.
On obtient $\exp(x) \leqslant 1$ car $\exp(0) = 1$.

Exemple. Montrer que pour tout $x \in\ ]4, +\infty[,\ \sqrt{x} > 2$.

$\hookrightarrow$ Soit $x \in\ ]4, +\infty[$. Alors $x > 4$.
On en déduit que $\sqrt{x} > \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
Donc $\sqrt{x} > 2$.

Exemple. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 \leqslant x \leqslant 2 \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \leqslant \tfrac{1}{x} \leqslant 1.$$

$\hookrightarrow$ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leqslant x \leqslant 2$.
Alors $1 \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2}$. En effet, on renverse le sens des inégalités car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ (et les nombres 1, x et 2 appartiennent bien à cet intervalle $]0, +\infty[$).
On conclut que $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$.

Exemple. Montrer que pour tout $x \leqslant -2$, $\exp(x^2+1) \geqslant \exp(5)$.
$\hookrightarrow$ Soit $x \leqslant -2$.
Alors $x^2 \geqslant (-2)^2$ car la fonction carrée est <u>décroissante</u> sur $]-\infty, 0[$.
Cela revient à écrire $x^2 \geqslant 4$, puis $x^2+1 \geqslant 5$ par addition.
Enfin, on obtient $\exp(x^2+1) \geqslant \exp(5)$ par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Remarque. On note que dans ce dernier exemple, on a reconstruit la fonction $x \mapsto \exp(x^2+1)$ pas à pas. On a d'abord transformé x en x^2, puis en x^2+1 puis en $\exp(x^2+1)$.

. . . .

Exercices

Exercice 19. Soit $x \geqslant 5$. Compléter par $\geqslant$ ou $\leqslant$.

$$x \geqslant 5 \quad \text{donc} \quad -3x \ \ldots \ -15 \quad \text{donc} \quad -3x+7 \ \ldots \ -8 \quad \text{donc} \quad \frac{-3x+7}{2} \ \ldots \ -4.$$

Exercice 20. Montrer que si $x \geqslant 4$, alors $0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{4}$.

Exercice 21. Montrer que pour tout $x \in [-1, 0]$, $\frac{1}{e} \leqslant \exp(x) \leqslant 1$.

Exercice 22. Soit $x \in [1, 2]$.

a) Déterminer un encadrement de x^2+1, c'est-à-dire trouver des nombres réels m et M tels que $m \leqslant x^2+1 \leqslant M$.
b) Déterminer un encadrement de $\dfrac{1}{x}$.
c) En déduire que $1 \leqslant \dfrac{x^2+1}{x} \leqslant 5$.

Exercice 23. Soit $x \in [1, 3]$. Déterminer un encadrement de la fraction $\dfrac{\ln(x)+5}{2}$.

Exercice 24. Soit $x \in [-2, 3]$. On veut déterminer un encadrement de x^2.

i) Commençons par le cas où $x \in [0, 3]$. Donner un encadrement de x^2.
ii) Ensuite, traitons le cas où $x \in [-2, 0]$. Donner un encadrement de x^2.
iii) Conclure quant à l'encadrement de x^2 lorsque $x \in [-2, 3]$.

Thème 5 : Exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle

Théorème et définition. Il **existe** une **unique** fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 1$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$. On l'appelle *fonction exponentielle* et on la note exp.

De cette définition, on déduit les propriétés suivantes :

* $\exp(0) = 1$.
* exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vérifie $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On doit retenir l'allure graphique *(voir graphique page suivante)* de la fonction exponentielle ainsi que les propriétés suivantes :

* La fonction exponentielle est strictement positive : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.
* La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: si x et y sont deux nombres réels tels que $x < y$, alors $\exp(x) < \exp(y)$.

Définition. On appelle *nombre d'Euler* et on note e le nombre $\boxed{e = \exp(1)}$. C'est un nombre irrationnel qui vaut approximativement : $e \approx 2{,}7$.

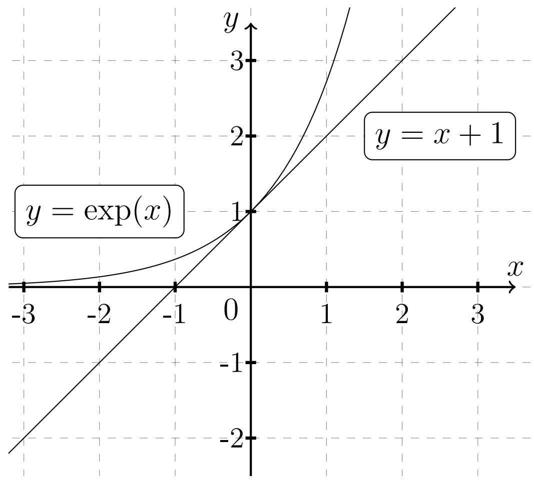
Le nombre e permet de calculer n'importe quelle valeur de la fonction exponentielle via la propriété suivante :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x.}$$

$\exp(x)$ est donc égale à « e à la puissance x ». On en déduit que la fonction exponentielle possède toutes les propriétés d'une fonction puissance, qu'on liste ci-dessous :

* Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$. En effet, $e^{x+y} = e^x e^y$.
* En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp(x)\exp(-x) = 1}$. En effet, $e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$.
* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}}$. En effet, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
* Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}}$. En effet, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
* Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{(\exp(x))^n = \exp(nx)}$. En effet, $(e^x)^n = e^{nx}$.
* Pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $\exp(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \exp(x_1)\exp(x_2)\cdots\exp(x_n)$.

On doit également retenir l'inégalité suivante, avec le dessin et la démonstration associés : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp(x) \geqslant x+1}$.



Démonstration :

Il n'est pas facile de montrer directement l'inégalité $\exp(x) \leqslant x+1$*, car les deux côtés de l'inégalité dépendent de* x*. La stratégie consiste à mettre tous les* x *du même côté et d'étudier la fonction* f *ainsi crée.*

On commence par modifier l'inégalité :

$$\exp(x) \geqslant x+1 \iff \exp(x) - (x+1) \geqslant 0 \iff \exp(x) - x - 1 \geqslant 0.$$

On pose $f(x) = \exp(x) - x - 1$. Il nous reste à démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \exp(x) - 1 - 0 = \exp(x) - 1.$$

On résout l'inégalité $f'(x) \geqslant 0$:

$$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exp(x) - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \exp(x) \geqslant 1 \Leftrightarrow \exp(x) \geqslant \exp(0) \Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f suivants :

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations, la fonction f atteint son minimum en 0, qui vaut 0 car $f(0) = \exp(0) - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$. On a donc démontré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x+1$.

La fonction logarithme népérien

Théorème et définition. Pour tout $x > 0$, il existe un unique réel y tel que $\exp(y) = x$. Ce nombre y est appelé *logarithme népérien de x*. On le note $\ln(x)$.

La fonction logarithme népérien, notée ln est donc définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On déduit directement de la définition que :

* Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\boxed{\exp(\ln(x)) = x}$.

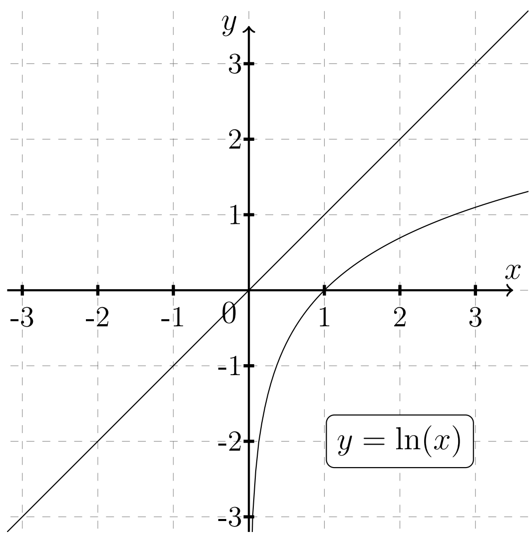
On se restreint à l'intervalle $]0, +\infty[$ car $\ln(x)$ n'est pas définie en dehors de cet intervalle. On doit également connaître les deux propriétés :

* Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln(\exp(y)) = y}$.
* Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{e^y = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \ln(x)}$$

Cette dernière propriété nous dit que les fonctions exp et ln sont *réciproques* l'une de l'autre.

On rappelle l'allure de la courbe de ln. On remarquera notamment que la courbe passe par le point de coordonnées $(1, 0)$ et que si on effectue la symétrie de cette courbe par rapport à la droite d'équation $y = x$, on obtient la courbe de la fonction exponentielle (c'est une conséquence du fait que exp et ln sont réciproques l'une de l'autre).



Voici les propriétés de la fonction ln à connaître :

* La fonction ln est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$.
* La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
* $\ln(0)$ n'existe pas, $\quad \ln(1) = 0, \quad \ln(2) \in]0, 1[, \quad \ln(e) = 1$.
* Pour tous $x, y \in]0, +\infty[$, $\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$.
* Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$.

* Pour tous $x, y \in]0, +\infty[$, $\boxed{\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$.
* Pour tout $x \in]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\ln(x^n) = n\ln(x)}$.
* Pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n \in]0, +\infty[$, $\ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \cdots + \ln(x_n)$.

. . . .

Exercices

Exercice 25. Simplifier

a) $\dfrac{\exp(x^3)}{\exp(1+x^3)}$ b) $(\exp(x^2))^3$ c) $\exp(1)\exp(2)\exp(3)\exp(4)$.

Exercice 26. Simplifier

a) $\ln(x^2 + x) - \ln(x)$ b) $\ln(5x^2) - 2\ln(x)$
c) $\exp(2\ln(x))$ d) $4\ln(\sqrt{x})$.

Exercice 27. Démontrer l'inégalité suivante : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$. Faire un dessin illustrant cette inégalité.

Exercice 28. Résoudre l'inéquation $e^{2x} \leqslant 5$, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des nombres réels x qui vérifient cette inégalité.

Thème 6 : Les puissances

Dans cette fiche, on s'intéresse à x^α. Une première question se pose : pour quelles valeurs de x et de α ce nombre x^α est-il bien défini ?

* Lorsque α est un nombre entier positif, x^α est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
* Lorsque α est un nombre entier strictement négatif, x^α est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
* Lorsque α est un nombre réel non entier, x^α est bien défini pour tout $x \in]0, +\infty[$.

On détaille cela dans cette fiche.

Lorsque α est un nombre entier positif.

Dans ce cas, x^α est bien défini quelle que soit x dans $\mathbb{R}$. Vous connaissez la définition depuis de longues années :

$$x^\alpha = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ termes}}.$$

Exemple.

$$4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \qquad (-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$$

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^6 = \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} \qquad 0^{12} = \underbrace{0 \times 0 \times \cdots \times 0}_{12 \text{ termes}} = 0.$$

En ayant cette définition en tête, les deux propriétés suivantes des puissances sont naturelles :

* $\boxed{x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}}$ En effet,

$$x^\alpha x^\beta = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ termes}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\beta \text{ termes}} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha+\beta \text{ termes}} = x^{\alpha+\beta}.$$

* $\boxed{(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}}$ En effet,

$$(x^\alpha)^\beta = \underbrace{x^\alpha \times \cdots \times x^\alpha}_{\beta \text{ termes}} = \underbrace{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ termes}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ termes}} \times \cdots \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ termes}}}_{\beta \text{ termes}} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha\times\beta \text{ termes}} = x^{\alpha\beta}.$$

Remarque. ⚠ Les nombres $(5^3)^2$ et $5^{(3^2)}$ sont différents. En effet,

$$(5^3)^2 = 5^{3\times 2} = 5^6 \qquad \text{et} \qquad 5^{(3^2)} = 5^9.$$

Par convention, lorsqu'on écrit 5^{3^2} sans parenthèses, cela désigne $5^{(3^2)}$. Donc $5^{3^2} = 5^9$.

On remarque aussi que si α et β sont positifs et que $\alpha \geqslant \beta$, alors $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$: par exemple,

$$\frac{2^7}{2^4} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2}} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3.$$

Or cette propriété reste vraie si $\alpha < \beta$: il suffit pour cela de généraliser la définition à des exposants négatifs, comme nous allons le voir.

Lorsque α est un nombre entier strictement négatif.

Dans ce cas, on définit $\boxed{x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}}$. Par exemple, $x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$.

Bien sûr, il faut écarter $x = 0$ de cette définition, car on ne peut pas diviser par zéro. C'est la raison pour laquelle, lorsque α est entier et strictement négatif, x^α n'est défini que pour tout nombre réel x non nul.

Exemple. Dans les exemples ci-dessous, α vaut respectivement -3 et -2.

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2\times 2\times 2} = \frac{1}{8}. \qquad (-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{(-5)\times(-5)} = \frac{1}{25}.$$

L'avantage de cette définition, c'est qu'elle est compatible avec toutes les propriétés énoncées dans la partie précédente, qui restent donc vraies si les exposants sont négatifs.

Exemple. $(5^{-3})^{-4} = 5^{(-3)\times(-4)} = 5^{12}$. On peut se convaincre de ce résultat en menant le calcul d'une manière différente :

$$(5^{-3})^{-4} = \frac{1}{(5^{-3})^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5^3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1^4}{(5^3)^4}} = \frac{1}{\frac{1}{5^{12}}} = 1 \times \frac{5^{12}}{1} = 5^{12}.$$

On peut faire le bilan de toutes les propriétés sur les puissances :

Bilan. Pour tous $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, pour tous nombres entiers α et β,

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \qquad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \qquad x^{-\beta} = \frac{1}{x^\beta} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Pour tous $x \in]0, +\infty[$ et tout nombre entier α, $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

Exemple. $3 \times 3^4 \times 3^7 = 3^{1+4+7} = 3^{12}$.

Bien entendu, il s'agit exactement des mêmes propriétés que celles déjà vues dans la fiche précédente pour la fonction exponentielle. D'ailleurs, dans un exercice de la fiche précédente, nous avions fait le calcul suivant :

$$\exp(2\ln(x)) = \exp(\ln(x^2)) = x^2.$$

Pour que ce calcul soit valable, x doit être strictement positif, car $\ln(x)$ ne serait pas définie sinon. On pourrait remplacer 2 par tout entier α dans ce calcul, donc on peut énoncer :

Proposition. Pour tout entier α, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.

Cette propriété est vraie pour tous les entiers α. Or l'expression $\exp(\alpha \ln(x))$ est parfaitement définie pour tous les nombres réels α. D'où l'idée de la définition qui vient.

Lorsque α est un nombre réel quelconque.

Définition. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on définit x^α comme suit :

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

Exemple. $2^{3/4} = \exp(\frac{3}{4}\ln(2)) = e^{\frac{3}{4}\ln(2)}$.
En utilisant Python ou la calculatrice, on obtient la valeur numérique suivante : $2^{3/4} \simeq 1{,}682$. La fraction $\frac{3}{4}$ étant comprise entre 0 et 1, on peut noter que $2^{3/4}$ est bien compris entre $2^0 = 1$ et $2^1 = 2$.

Exemple. $3^{-9/2} = \exp(-\frac{9}{2}\ln(3)) \simeq 0{,}00713$.
En rappelant que $-\frac{9}{2} = -4{,}5$, on a bien l'inégalité $3^{-5} \leqslant 3^{-9/2} \leqslant 3^{-4}$ car $3^{-5} \simeq 0{,}00412$ et $3^{-4} \simeq 0{,}0123$.

Exemple. $(-2)^{3/2}$ n'existe pas car $(-2) \notin]0, +\infty[$.

Toutes les propriétés qui étaient valables lorsque α est entier le restent pour α réel quelconque :

Proposition. Toutes les propriétés de l'encadré « Bilan » de la page précédente sont encore vraies lorsque $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in]0, +\infty[$.

Faisons l'exercice de démontrer chacune de ces propriétés avec notre nouvelle définition :

$$x^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\ln(x)} = e^{\alpha\ln(x)+\beta\ln(x)} = e^{\alpha\ln(x)}e^{\beta\ln(x)} = x^\alpha x^\beta,$$

donc la première propriété est vraie. Pour la deuxième :

$$x^{\alpha-\beta} = e^{(\alpha-\beta)\ln(x)} = e^{\alpha\ln(x)-\beta\ln(x)} = \frac{e^{\alpha\ln(x)}}{e^{\beta\ln(x)}} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}.$$

La racine carrée

On rappelle la définition de la racine carrée donnée dans le thème 2 :

Définition. Si $x \geqslant 0$, *la racine carrée de* x est l'unique nombre réel positif a tel que $a^2 = x$. On la note $\sqrt{x}$.

Prenons un x strictement positif. D'après ce qu'on vient de voir, le nombre $x^{1/2}$ est défini par $x^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln(x)}$. Ce nombre est strictement positif, car $e^{\frac{1}{2}\ln(x)} > 0$. Or en utilisant la propriété $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$, on constate que :

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = x^1 = x.$$

Donc $x^{1/2}$ est un nombre réel positif tel que $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$. C'est donc la racine carrée de x. Nous venons de démontrer que :

Proposition. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Exemple. $(64)^{1/2} = \sqrt{64} = 8$.

Exemple. Pour tout $x > 0$, $x\sqrt{x} = x^{3/2}$.

$\hookrightarrow$ En effet, $x\sqrt{x} = x \times x^{1/2} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{3/2}$.

Exemple. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

$\hookrightarrow$ En effet, $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{x^{1/2}} = x^{1-\frac{1}{2}} = x^{1/2} = \sqrt{x}$.

$\hookrightarrow$ Une autre manière de faire est $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

Pour tout $x > 0$, la *racine cubique* de x est par définition l'unique réel positif a tel que $a^3 = x$. On la note $\sqrt[3]{x}$. De la même manière que pour la racine carrée, l'égalité $\boxed{\sqrt[3]{x} = x^{1/3}}$ est vraie pour tout $x > 0$.

Exemple. $8^{1/3} = 2$ car $2^3 = 8$. $\quad (27)^{1/3} = 3$ car $3^3 = 27$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut généraliser ce qu'on vient de voir en définissant la *racine n-ème* de x comme l'unique réel positif a tel que $a^n = x$. On la note $\sqrt[n]{x}$ et on a $\boxed{\sqrt[n]{x} = x^{1/n}}$.

. . . .

Exercices

Exercice 29. Vrai ou faux ? Si vous répondez faux, donnez un contre-exemple.

a) $\sqrt{60}$ appartient à l'intervalle $[7; 8]$.
b) Pour tous $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $x^{1-n} = \frac{1}{x^{1+n}}$.
c) Pour tous $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $x^{3-2n} = \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-3}$.
d) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $6^\alpha = 2^\alpha \times 3^\alpha$.
e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $25^n = 5^{2n}$.
f) Pour tous $x, y \in [0, +\infty[$, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exercice 30. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{1}{4^n} + \dfrac{1}{4^{n+1}}$ $\qquad$ b) $\dfrac{5^{n^2}}{3 \times 5^n}$ $\qquad$ c) $\dfrac{6^n}{2 \times 6^{2n}}$.

Exercice 31. Tableau des puissances de 3 :

$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$
$3^6 = 729$	$3^7 = 2187$	$3^8 = 6561$	$3^9 = 19683$	$3^{10} = 59049$

En s'aidant du formulaire ci-dessus, calculer les six expressions suivantes

$$3^{2^3} \qquad 3^{-7} \qquad \frac{3^2}{3^7} \qquad (-3)^{-3} \times (-3)^9 \qquad 9^5 \qquad 27^2.$$

Exercice 32. Soit $x > 4$. Justifier que l'expression ci-dessous est bien définie, puis la simplifier.

$$2\ln\left(\sqrt{(x-4)x}\right) - \ln(x-4).$$

Thème 7 : Calcul de dérivées

Les dérivées usuelles

On doit connaître les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x)$	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
c (constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^n, où $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
x^α, où $\alpha \in \mathbb{R}$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$

Le *domaine de définition*, c'est l'ensemble des x en lesquels la fonction f est définie.
Le *domaine de dérivabilité*, c'est l'ensemble des x en lesquels la fonction f est dérivable. Le domaine de dérivabilité est toujours inclus dans le domaine de définition, mais peut être strictement plus petit, comme dans l'exemple de $f(x) = \sqrt{x}$ où f est définie en 0 mais non dérivable en 0.

⚠ Quand on rédige, on écrit par exemple $f(x) = x^\alpha$ et $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ mais jamais $\cancel{f = x^\alpha}$ ni $\cancel{f' = \alpha x^{\alpha-1}}$.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de f.

$\hookrightarrow$ La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \boxed{3x^2}$.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Calculer la dérivée de f.

$\hookrightarrow$ Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x\sqrt{x} = x \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Calculer la dérivée de f.

$\hookrightarrow$ La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \boxed{-\frac{2}{x^3}}$.

$\hookrightarrow$ *Autre méthode* : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x^{-2}$, donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = (-2)x^{-2-1} = -2x^{-3} = \boxed{-\frac{2}{x^3}}$.

Les opérations sur les dérivées

Supposons que $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ soient dérivables sur le même intervalle I. Les cinq formules suivantes sont à connaître :

$(u+v)' = u' + v'$	Si λ est une constante, alors $(\lambda u)' = \lambda u'$	
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^4}{5}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de f.
Dans cet exemple, on pourrait utiliser la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$*, mais il y a plus simple ! En effet, le dénominateur est ici une constante, donc on peut se ramener à la formule* $(\lambda u)'$.

$\hookrightarrow$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4}{5} = \frac{1}{5}x^4$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{5} \times 4x^3 = \boxed{\frac{4}{5}x^3}$.

Exemple. Soit g la fonction définie par $g(x) = xe^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de g.

$\hookrightarrow$ La fonction g est le produit des fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par produit, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = \boxed{(1+x)e^x}.$$

⚠ Ne pas écrire $\cancel{g' = u'v + uv' = e^x + xe^x}$. Soit vous mettez des x dans chaque membre de l'égalité, soit dans aucun, mais pas de mélange !

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \in \,]0, +\infty[$. Calculer la dérivée de f.

$\hookrightarrow$ *Une troisième méthode pour cette fonction* : f peut s'écrire $f(x) = \frac{1}{v(x)}$, où v est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $v(x) = x^2$. La fonction v est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc par quotient la fonction f l'est aussi. De plus, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{2x}{(x^2)^2} = -\frac{2x}{x^4} = \boxed{-\frac{2}{x^3}}.$$

Exemple. Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{3\ln(x)}{x^2+4}$ pour tout $x \in \,]0, +\infty[$. Calculer la dérivée de h.

$\hookrightarrow$ On pose sur $]0, +\infty[$: $u(x) = 3\ln(x)$ et $v(x) = x^2 + 4$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0, +\infty[$, de dérivées $u'(x) = 3 \times \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$ et $v'(x) = 2x + 0 = 2x$. Par quotient, h est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée :

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{3}{x}(x^2+4) - 3\ln(x)2x}{(x^2+4)^2} = \frac{3(x^2+4)}{x(x^2+4)^2} - \frac{6x\ln(x)}{(x^2+4)^2}$$
$$= \boxed{\frac{3}{x(x^2+4)} - \frac{6x\ln(x)}{(x^2+4)^2}}.$$

La dérivée d'une fonction composée

Soit $h(x) = \exp(1 + \ln(x))$ définie sur $]0, +\infty[$. Analysons cette fonction h : on prend un x, on lui applique d'abord la fonction $f(x) = 1 + \ln(x)$, puis on applique à ce résultat la fonction $g(x) = \exp(x)$. Ainsi, $h(x) = \exp(f(x)) = g(f(x))$. On peut schématiser cela ainsi :

$$x \rightsquigarrow \boxed{\text{fonction } f} \rightsquigarrow 1 + \ln(x) \rightsquigarrow \boxed{\text{fonction } g} \rightsquigarrow \exp(1 + \ln(x))$$

Lorsqu'on applique d'abord la fonction f et ensuite la fonction g, on dit qu'on compose les fonctions f et g et on note :

$$\boxed{h(x) = g(f(x)) = g \circ f(x).}$$

⚠ Lorsqu'on écrit $g \circ f$, on applique d'abord f puis g.

Supposons que $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ soient deux fonctions dérivables respectivement sur l'intervalle I et sur l'intervalle J. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f).$$

Cette formule signifie que pour tout $x \in I$, $(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$.

Exemple. Reprenons $h(x) = \exp(1 + \ln(x)) = g \circ f(x)$. Calculer la dérivée de h.

$\hookrightarrow$ On rappelle que $f(x) = 1 + \ln(x)$ et $g(x) = \exp(x)$.

Les fonctions f et g sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$, de dérivées $f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ et $g'(x) = \exp(x)$. Ainsi, h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} h'(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)) = \frac{1}{x}\exp(f(x)) = \frac{1}{x}\exp(1 + \ln(x)) &= \frac{\exp(1)\exp(\ln(x))}{x} \\ &= \frac{ex}{x} = \boxed{e}. \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ On aurait pu utiliser une méthode plus rapide pour cet exemple, car pour tout x strictement positif, $h(x) = \exp(1)\exp(\ln(x)) = \exp(1)x = ex$. Donc h est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $h'(x) = \boxed{e}$.

Remarque. En prenant des exemples particuliers de fonctions g dans la formule de l'encadré ci-dessus, on peut en déduire de nombreuses autres formules :

$(e^f)' = f'e^f$	$(\ln(f))' = \dfrac{f'}{f}$	$(f^2)' = 2f'f$
$(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha - 1}$	$\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$	$(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

Il n'est pas nécessaire de les apprendre par cœur, car si vous connaissez $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$, vous les retrouvez toutes en choisissant correctement g.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^3 - 3)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de f.

$\hookrightarrow$ On pose $u(x) = x^3 - 3$ et $v(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f(x) = v(x^3-3) = v(u(x)) = v \circ u(x)$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 2x$. Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) = (v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x)) = 3x^2 \times 2u(x) = 3x^2 \times 2(x^3 - 3) &= 6x^2(x^3 - 3) \\ &= \boxed{6x^5 - 18x^2}. \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ *Autre méthode* : $f(x) = (x^3 - 3)^2 = (x^3)^2 - 2 \times x^3 \times 3 + 3^2 = x^6 - 6x^3 + 9$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 6x^5 - 6 \times 3x^2 = \boxed{6x^5 - 18x^3}$.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la dérivée de f.

$\hookrightarrow$ On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $f(x) = v(2x+1) = v(u(x)) = v \circ u(x)$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivées $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée

$$f'(x) = (v \circ u)'(x) = u'(x)v'(u(x)) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}.$$

. . . .

Exercices

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

Exercice 33. $f(x) = \dfrac{x^5}{10} - 3x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34. $g(x) = x^2 \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 35. $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^3}$ sur $]-\infty, 0[$.

Exercice 36. $f(x) = \sqrt{\exp(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 37. $g(x) = \ln(2x^2 + 5x + 2)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 38. $h(x) = \dfrac{1}{(2 + \cos(x))^3}$ sur $]1, +\infty[$.

Travail d'été ECG1
Corrigé des exercices

L'ensemble des exercices du cahier d'été sont corrigés dans ce document. Évidemment, pour que votre travail d'été soit efficace, il est vivement recommandé de ne regarder les corrections qu'après avoir essayé de résoudre les exercices proposés.

Autre conseil important : si vous ne comprenez pas une correction, vous aurez la possibilité de poser toutes vos questions au professeur à la rentrée. Mais pensez à bien noter toutes vos questions !

Thème 1 : Les fractions

Exercice 1. Simplifier les fractions suivantes :

$$A = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{7}} \qquad B = \frac{1}{\frac{3}{4}} \qquad C = \frac{\frac{4}{5}}{2}$$

$$D = \frac{1344}{111} \times \frac{888}{2688} \qquad E = \frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{2}{7}} \qquad F = \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{24} + \frac{1}{12}\right).$$

Corrigé.

$$A = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{9}{7}} = \frac{5}{2} \times \frac{7}{9} = \boxed{\frac{35}{18}}$$

$$B = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1 \times \frac{4}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$C = \frac{\frac{4}{5}}{2} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times \cancel{2}}{5 \times \cancel{2}} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

$$D = \frac{1344}{111} \times \frac{888}{2688} = \frac{\cancel{1344} \times 8 \times \cancel{111}}{\cancel{111} \times 2 \times \cancel{1344}} = \frac{8}{2} = \boxed{4}$$

$$E = \frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{3}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{3} \times \frac{7}{2} = \boxed{\frac{49}{6}}$$

$$F = \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{24} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{24} + \frac{1}{12}\right) = \frac{4}{24} - \left(\frac{7}{24} + \frac{2}{24}\right) = \frac{4}{24} - \frac{9}{24} = \boxed{\frac{-5}{24}}$$

Exercice 2. Démontrer pour tout entier naturel n les trois égalités suivantes :

a) $\dfrac{3n(n^2+1)-3n}{9} = \dfrac{n^3}{3}$.

b) $\dfrac{n^2+2n-15}{7} = \dfrac{(n+5)(n-3)}{7}$.

c) $\dfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Corrigé.

a) *Remarque : la méthode A exposée dans la partie* ***Montrer une égalité*** *fonctionne bien ici.*

$$\frac{3n(n^2+1)-3n}{9} = \frac{3n^3+3n-3n}{9} = \frac{3n^3}{9} = \frac{n^3}{3}.$$

b) *Ici, la méthode B fonctionne mieux, car il est plus facile de développer que de factoriser.*

$$\frac{(n+5)(n-3)}{7} = \frac{n^2+5n-3n-15}{7} = \frac{n^2+2n-15}{7}.$$

c) *Ici, la méthode C est rapide, car il suffit de développer les deux termes et de remarquer que le résultat est le même.*

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

On en déduit que

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Exercice 3. Votre camarade de classe a écrit sur son cahier :

$$\frac{3x+2}{3} = \frac{\cancel{3}x+2}{\cancel{3}} = x+2.$$

Expliquez-lui pourquoi son calcul est faux.

Corrigé. Il y a plusieurs manières de lui expliquer son erreur.

Première manière : on peut dire que si on remplace par exemple x par 1, on constate que les deux membres ne sont pas égaux :

$$\frac{3x+2}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{2}$$

$$x+2 = 1+2 = 3.$$

Deuxième manière : on peut expliquer que « barrer le nombre 3 » revient à multiplier par $\frac{1}{3}$ le numérateur et le dénominateur. Regardons ce que donne un calcul correct :

$$\frac{3x+2}{3} = \frac{(3x+2)\times\frac{1}{3}}{3\times\frac{1}{3}} = \frac{x+\frac{2}{3}}{1} = x+\frac{2}{3}.$$

Troisième manière : on peut expliquer que si on veut tout de même « barrer le nombre 3 », il faut d'abord factoriser par 3 au numérateur :

$$\frac{3x+2}{3} = \frac{\cancel{3}(x+\frac{2}{3})}{\cancel{3}} = x+\frac{2}{3}.$$

Exercice 4. Soit x un nombre réel positif. Calculer $\dfrac{\dfrac{5x+21}{x^2+6x+5}}{\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{1}{x+5}}$.

Corrigé. Commençons par calculer uniquement le dénominateur (*on peut tout à fait commencer par calculer seulement un petit bout de la fraction, ça évite de recopier toute la grande fraction à chaque ligne)*

$$\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x+5} = \frac{4(x+5)+1(x+1)}{(x+1)(x+5)} = \frac{4x+20+x+1}{x^2+x+5x+5} = \frac{5x+21}{x^2+6x+5}.$$

Revenons à la fraction de départ :

$$\frac{\dfrac{5x+21}{x^2+6x+5}}{\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{1}{x+5}} = \frac{\dfrac{5x+21}{x^2+6x+5}}{\dfrac{5x+21}{x^2+6x+5}} = \cancel{\frac{5x+21}{x^2+6x+5}} \times \cancel{\frac{x^2+6x+5}{5x+21}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Exercice 5. Soit x un nombre réel non nul. Simplifier

$$A = \frac{x^4}{x} \qquad B = \frac{x^3}{x^7} \qquad C = \frac{x^5+x^2}{x^2} \qquad D = \frac{x+x^4}{x}.$$

Corrigé.

$$A = \frac{x^4}{x} = \frac{x^3\times x}{x} = \boxed{x^3}$$
$$B = \frac{x^3}{x^7} = \frac{x^3}{x^3\times x^4} = \boxed{\frac{1}{x^4}} = \boxed{x^{-4}}$$
$$C = \frac{x^5+x^2}{x^2} = \frac{x^5}{x^2}+\frac{x^2}{x^2} = \boxed{x^3+1}$$
$$D = \frac{x+x^4}{x} = \frac{x}{x}+\frac{x^4}{x} = \boxed{1+x^3}.$$

Autre manière de calculer pour C et D, on peut mettre respectivement x^2 et x en facteur, puis simplifier :

$$C = \frac{x^5 + x^2}{x^2} = \frac{x^2(x^3+1)}{x^2} = \boxed{x^3+1}$$
$$D = \frac{x + x^4}{x} = \frac{x(1+x^3)}{x} = \boxed{1+x^3}.$$

Exercice 6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Simplifier

$$A = \frac{1+n}{n^2} \times n \qquad B = \frac{n+7}{n-1} \times \frac{n-7}{n+1} \qquad C = \frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{n-1}{n^3}}.$$

Corrigé.

$$A = \frac{1+n}{n^2} \times n = \frac{(1+n)n}{n^2} = \frac{(1+n)n}{n \times n} = \boxed{\frac{1+n}{n}}$$
$$B = \frac{n+7}{n-1} \times \frac{n-7}{n+1} = \frac{(n+7)(n-7)}{(n-1)(n+1)} = \boxed{\frac{n^2-49}{n^2-1}}$$

(on a utilisé l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$)

$$C = \frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{n-1}{n^3}} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n^3}{n-1} = \frac{(n-1)n^3}{n(n-1)} = \frac{n^3}{n} = \boxed{n^2}.$$

Thème 2 : Les racines carrées

Exercice 7.

a) Donner un exemple d'un nombre réel x qui vérifie $\sqrt{x^2} = x$.

b) Donner un exemple d'un nombre réel x qui vérifie $\sqrt{x^2} = -x$.

Corrigé.

a) Par exemple, le réel $x = 5$ convient. On vérifie :

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2} = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5 \\ &x = 5. \end{aligned}$$

N'importe quel nombre x supérieur ou égal à 0 convient.

b) Par exemple, le réel $x = -3$ convient. On vérifie :

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \\ &-x = 3. \end{aligned}$$

N'importe quel nombre x inférieur ou égal à 0 convient.

Exercice 8. Soit n un entier strictement positif. Simplifier

$$A = \sqrt{n^6} \qquad B = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^5}} \qquad C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}.$$

Corrigé.

$$A = \sqrt{n^6} = \sqrt{n^3 \times n^3} = \sqrt{(n^3)^2} = |n^3| = \boxed{n^3}$$

où $|n^3| = n^3$ car n^3 est positif.

$$B = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^5}} = \sqrt{\frac{n}{n^5}} = \sqrt{\frac{n}{n \times n^4}} = \sqrt{\frac{1}{n^4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{\sqrt{(n^2)^2}} = \frac{1}{|n^2|} = \boxed{\frac{1}{n^2}}$$

où $|n^2| = n^2$ car n^2 est positif.

$$C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Exercice 9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n^4+n^8} = n^2\sqrt{1+n^4}.$$

Corrigé.

$$\begin{aligned}\sqrt{n^4+n^8} = \sqrt{n^4+n^4\times n^4} = \sqrt{n^4(1+n^4)} = \sqrt{n^4}\sqrt{1+n^4} = \sqrt{(n^2)^2}\sqrt{1+n^4} &= |n^2|\sqrt{1+n^4} \\ &= n^2\sqrt{1+n^4}\end{aligned}$$

où $|n^2| = n^2$ car n^2 est positif.

Exercice 10. Soit $x \in]0,+\infty[$. Simplifier

$$A = \frac{3}{\sqrt{14}+\sqrt{5}} \qquad B = \frac{4x}{\sqrt{2x}-\sqrt{x}}.$$

Corrigé.

$$\begin{aligned}A &= \frac{3}{\sqrt{14}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{14}-\sqrt{5}}{\sqrt{14}-\sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{14}-\sqrt{5})}{(\sqrt{14}+\sqrt{5})(\sqrt{14}-\sqrt{5})} \\ &= \frac{3(\sqrt{14}-\sqrt{5})}{(\sqrt{14})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{3(\sqrt{14}-\sqrt{5})}{14-5} = \frac{3(\sqrt{14}-\sqrt{5})}{9} = \boxed{\frac{\sqrt{14}-\sqrt{5}}{3}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{4x}{\sqrt{2x}-\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x}} = \frac{4x(\sqrt{2x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{2x}-\sqrt{x})(\sqrt{2x}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{4x(\sqrt{2x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{2x})^2-(\sqrt{x})^2} = \frac{4x(\sqrt{2x}+\sqrt{x})}{2x-x} = \frac{4x(\sqrt{2x}+\sqrt{x})}{x} = \boxed{4\left(\sqrt{2x}+\sqrt{x}\right)}.\end{aligned}$$

Exercice 11. Montrer que pour tous $x, y \in [0,+\infty[$,

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x}\,\sqrt{1+\frac{y}{x}}.$$

Corrigé. *Il est plus simple ici de calculer le membre de droite pour retrouver à la fin le membre de gauche.*

$$\sqrt{x}\,\sqrt{1+\frac{y}{x}} = \sqrt{x\left(1+\frac{y}{x}\right)} = \sqrt{x+y}.$$

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier

$$A = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}.$$

Corrigé. On a une somme de deux fractions, donc on les met sur le même dénominateur :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} + \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} \\
&= \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2 + (\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \frac{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2 - \cancel{2\sqrt{7}\sqrt{5}} + (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2 + \cancel{2\sqrt{7}\sqrt{5}}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{7+5+7+5}{7-5} = \frac{24}{2} = \boxed{12}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})} - \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \\
&= \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) - (\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \quad \text{⚠ ne pas oublier les parenthèses ici} \\
&= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)} \quad \text{⚠ ici aussi} \\
&= \frac{-2\sqrt{n+1}}{-1} = \boxed{2\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

Thème 3 : Les courbes

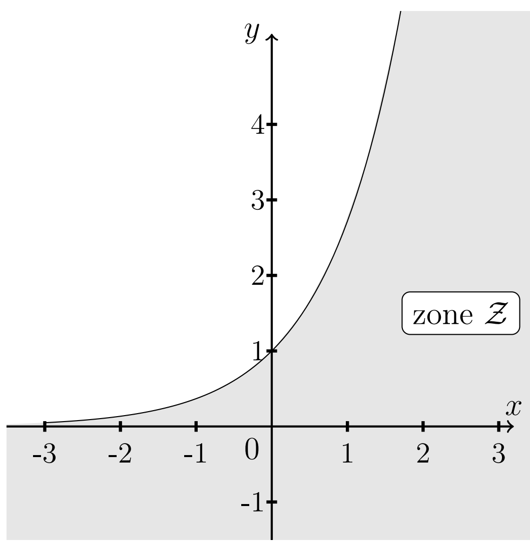
Exercice 13. On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \sqrt{3+x^2}$. Parmi les points suivants, lesquels appartiennent à $\mathcal{C}$ et lesquels n'y appartiennent pas ?

$A(0,3)$ $\qquad$ $B(-1,2)$ $\qquad$ $C(3,2\sqrt{3})$ $\qquad$ $D(-2,\sqrt{5})$.

Corrigé. Le but de cet exercice est de vérifier si les différents points sont solutions de l'équation $y = \sqrt{3+x^2}$.
Pour A, on prend $x=0$ et $y=3$: $\sqrt{3+x^2} = \sqrt{3+0^2} = \sqrt{3} \neq 3$, donc $\boxed{A \text{ n'appartient pas à } \mathcal{C}}$.
Pour B : $\sqrt{3+x^2} = \sqrt{3+(-1)^2} = \sqrt{4} = 2 = y$, donc $\boxed{B \text{ appartient à } \mathcal{C}}$.
Pour C : $\sqrt{3+x^2} = \sqrt{3+3^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, donc $\boxed{C \text{ appartient à } \mathcal{C}}$.
Pour D : $\sqrt{3+x^2} = \sqrt{3+(-2)^2} = \sqrt{7} \neq \sqrt{5}$, donc $\boxed{D \text{ n'appartient pas à } \mathcal{C}}$.

Exercice 14. Colorier la zone $\mathcal{Z}$ du plan vérifiant $y \leqslant \exp(x)$.

Corrigé. On trace la courbe $y = \exp(x)$. La zone à colorier est la zone en gris ci-dessous :



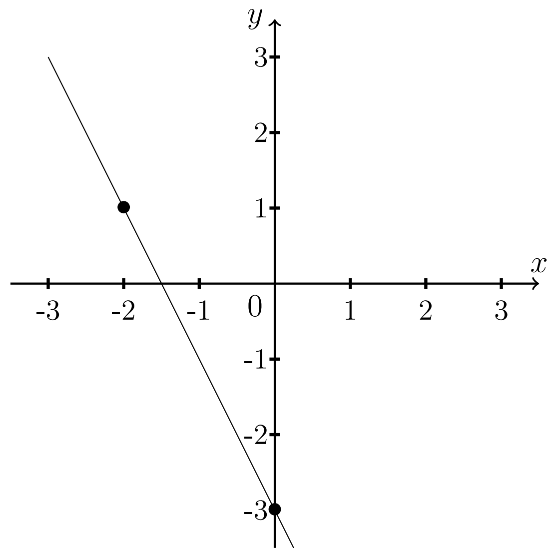
Exercice 15.

a) Tracer la courbe d'équation $y = -2x - 3$.
b) Tracer la courbe d'équation $y = 4x + 1$.
c) Tracer la courbe d'équation $x = 7$.

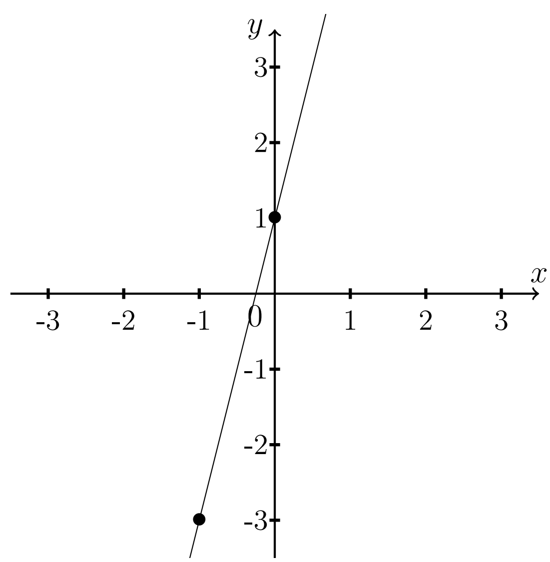
Corrigé.

a) On constate que l'équation est de la forme $y = ax + b$. la courbe à tracer est donc une droite.

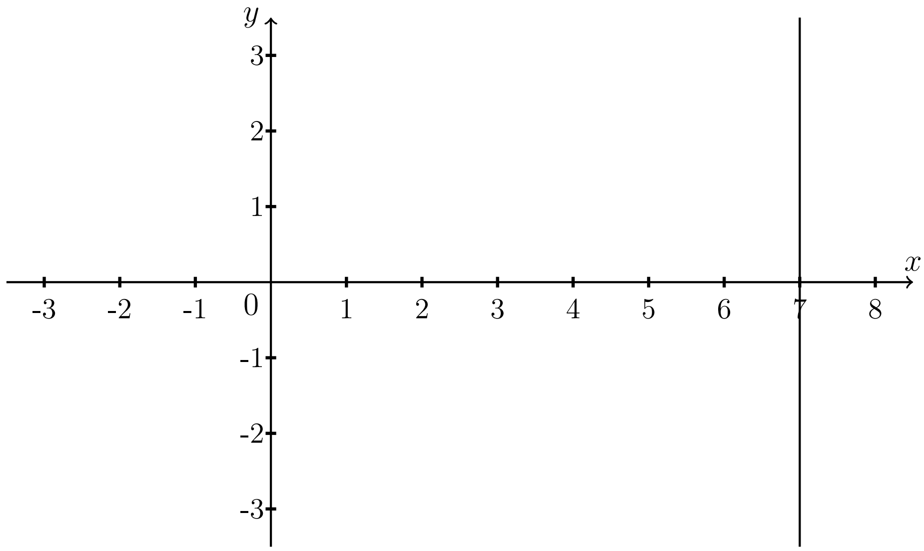
On commence par placer deux points. Par exemple, lorsque x vaut 0, y est égal à $-2 \times 0 - 3 = -3$, donc le point $(0, -3)$ se trouve sur la droite. Lorsque x vaut -2, y est égal à $(-2) \times (-2) - 3 = 4 - 3 = 1$, donc le point $(-2, 1)$ se trouve aussi sur la droite. On obtient :



b) Lorsque x vaut -1, y est égal à $4 \times (-1) + 1 = -4 + 1 = -3$ donc le point $(-1, -3)$ se trouve sur la droite. Lorsque x vaut 0, y vaut 1, donc le point $(0, 1)$ se trouve sur la droite. On obtient :

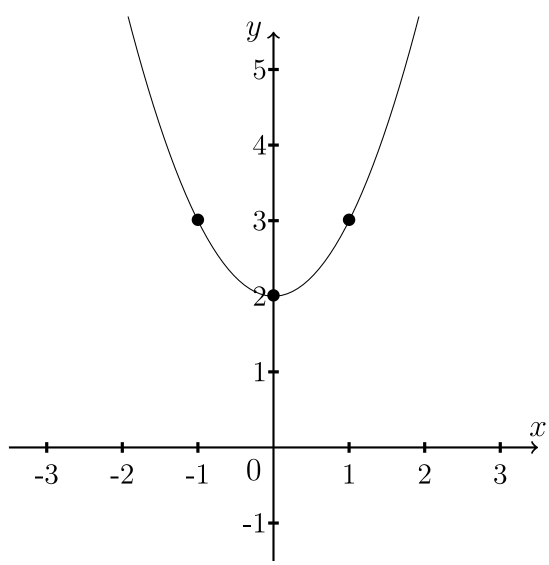


c) L'ensemble des points vérifiant l'équation $x = 7$ est l'ensemble des points ayant une abscisse égale à 7. La courbe d'équation $x = 7$ est donc une droite verticale :



Exercice 16. Tracer la courbe d'équation $y = x^2 + 2$.

Corrigé. Cette fois-ci, il ne s'agit pas de l'équation d'une droite. On peut tout de même placer quelques points.
Si $x = 0$, alors $y = 2$ donc $(0, 2)$ appartient à la courbe.
Si $x = 1$, alors $y = 3$ donc $(1, 3)$ appartient à la courbe.
Si $x = -1$, alors $y = 3$ donc $(-1, 3)$ appartient à la courbe.
De plus, on connaît la courbe de $y = x^2$, qui est une parabole. Par conséquent, la courbe d'équation $y = x^2 + 2$ est obtenue en translatant la parabole de deux unités vers le haut :

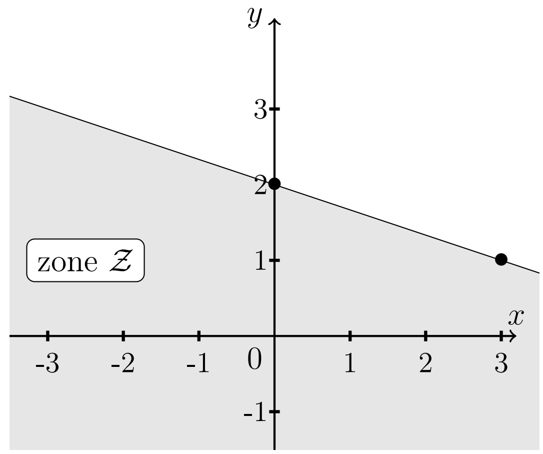


Exercice 17. Colorier la zone $\mathcal{Z}$ du plan vérifiant $x + 3y < 6$.

Corrigé. On commence par réécrire l'inégalité :
$x + 3y < 6$ devient $3y < -x + 6$ puis en divisant par 3 : $y < \frac{-x+6}{3}$, c'est-à-dire $y < -\frac{1}{3}x + 2$.

On trace d'abord la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x + 2$, puis on colorie la zone sous la droite.

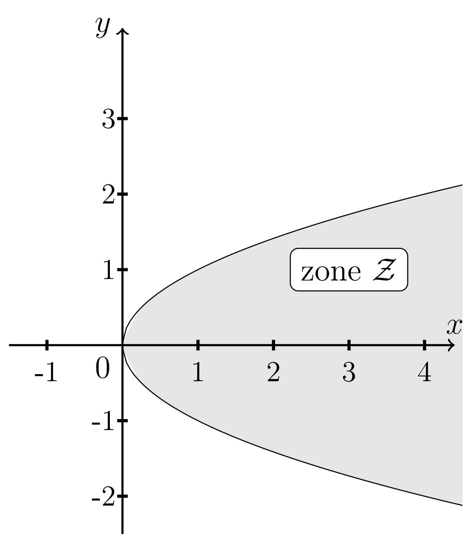
Pour tracer la droite d'équation $y = -\frac{1}{3}x + 2$, on peut par exemple placer les points $(0, 2)$ et $(3, 1)$.



Exercice 18. Colorier la zone $\mathcal{Z}$ du plan vérifiant simultanément $x \geqslant 0$ et $-\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$.

Corrigé. $x \geqslant 0$ signifie que tous les points coloriés ont une abscisse positive. Autrement dit, on ne coloriera aucun point du côté gauche de l'axe des ordonnées.

Ensuite, on trace les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = -\sqrt{x}$. La zone à colorier se trouvera entre ces deux courbes. On sait tracer la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$. Pour tracer $y = -\sqrt{x}$, il suffit de tracer la courbe obtenue par symétrie avec l'axe des abscisses.



Thème 4 : Les inégalités

Exercice 19. Soit $x \geqslant 5$. Compléter par $\geqslant$ ou $\leqslant$.

$$x \geqslant 5 \quad \text{donc} \quad -3x \ \ldots \ -15 \quad \text{donc} \quad -3x+7 \ \ldots \ -8 \quad \text{donc} \quad \frac{-3x+7}{2} \ \ldots \ -4.$$

Corrigé.

$$x \geqslant 5 \quad \text{donc} \quad -3x \ \leqslant \ -15 \quad \text{donc} \quad -3x+7 \ \leqslant \ -8 \quad \text{donc} \quad \frac{-3x+7}{2} \ \leqslant \ -4.$$

En effet, la multiplication par -3 change le sens de l'inégalité, tandis que l'addition de 7 puis la division par 2 ne changent pas le sens de l'inégalité.

Exercice 20. Montrer que si $x \geqslant 4$, alors $0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{4}$.

Corrigé. Soit $x \geqslant 4$.
Alors $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{4}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$.
De plus, $\frac{1}{x}$ est le rapport de deux nombres strictement positifs. Cette fraction est donc strictement positive : $\frac{1}{x} > 0$.
Ainsi, on obtient bien $0 < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{4}$.

Exercice 21. Montrer que pour tout $x \in [-1, 0]$, $\frac{1}{e} \leqslant \exp(x) \leqslant 1$.

Corrigé. Soit $x \in [-1, 0]$. Alors $-1 \leqslant x \leqslant 0$.
On en déduit que $\exp(-1) \leqslant \exp(x) \leqslant \exp(0)$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $\exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ et $\exp(0) = 1$, donc on obtient bien $\frac{1}{e} \leqslant \exp(x) \leqslant 1$.

Exercice 22. Soit $x \in [1, 2]$.

a) Déterminer un encadrement de $x^2 + 1$, c'est-à-dire trouver des nombres réels m et M tels que $m \leqslant x^2 + 1 \leqslant M$.

b) Déterminer un encadrement de $\dfrac{1}{x}$.

c) En déduire que $1 \leqslant \dfrac{x^2+1}{x} \leqslant 5$.

Corrigé.

a) Soit $x \in [1, 2]$. Alors $1 \leqslant x \leqslant 2$.
On en déduit que $1^2 \leqslant x^2 \leqslant 2^2$ car la fonction carrée est croissante sur $[0, +\infty[$. Donc $1 \leqslant x^2 \leqslant 4$.
Par addition, $\boxed{2 \leqslant x^2 + 1 \leqslant 5}$.

b) On sait que $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Alors $\frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$. Ainsi, $\boxed{\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1}$.

c) On écrit les deux inégalités obtenue une en-dessous de l'autre :

$$2 \leqslant x^2 + 1 \leqslant 5$$
$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1.$$

Tous les termes sont positifs, on peut donc multiplier les deux inégalités entre elles :

$$2 \times \frac{1}{2} \leqslant (x^2 + 1) \times \frac{1}{x} \leqslant 5 \times 1$$
$$\boxed{1 \leqslant \frac{x^2 + 1}{x} \leqslant 5}.$$

Exercice 23. Soit $x \in [1, 3]$. Déterminer un encadrement de la fraction $\frac{\ln(x) + 5}{2}$.

Corrigé. Soit $x \in [1, 3]$. Alors $1 \leqslant x \leqslant 3$.
Alors $\ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(3)$ car la fonction ln est croissante sur $]0, +\infty[$. Donc $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(3)$.
Par addition, $5 \leqslant \ln(x) + 5 \leqslant \ln(3) + 5$.
Enfin, $\boxed{\frac{5}{2} \leqslant \frac{\ln(x) + 5}{2} \leqslant \frac{\ln(3) + 5}{2}}$ car diviser par 2 ne change pas le sens de l'inégalité.

Exercice 24. Soit $x \in [-2, 3]$. On veut déterminer un encadrement de x^2.

a) Commençons par le cas où $x \in [0, 3]$. Donner un encadrement de x^2.

b) Ensuite, traitons le cas où $x \in [-2, 0]$. Donner un encadrement de x^2.

c) Conclure quant à l'encadrement de x^2 lorsque $x \in [-2, 3]$.

Corrigé.

a) Soit $x \in [0, 3]$. Alors $0 \leqslant x \leqslant 3$.
On en déduit que $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$ car la fonction carrée est croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Soit $x \in [-2, 0]$. Alors $-2 \leqslant x \leqslant 0$.
On en déduit que $(-2)^2 \geqslant x^2 \geqslant 0$ car la fonction carrée est <u>décroissante</u> sur $]-\infty, 0[$.
Donc $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$.

c) Soit $x \in [-2, 3]$. On a vu que dans un cas ($x \in [0, 3]$), x^2 est compris entre 0 et 9 et dans l'autre cas ($x \in [-2, 0]$), x^2 est compris entre 0 et 4.
On en conclut que x^2 est toujours compris entre 0 et 9 : $\boxed{0 \leqslant x^2 \leqslant 9}$.

Thème 5 : Exponentielle et logarithme

Exercice 25. Simplifier

a) $\dfrac{\exp(x^3)}{\exp(1+x^3)}$ b) $(\exp(x^2))^3$ c) $\exp(1)\exp(2)\exp(3)\exp(4)$.

Corrigé.

a) $\dfrac{\exp(x^3)}{\exp(1+x^3)} = \exp(x^3 - (1+x^3)) = \exp(x^3 - 1 - x^3) = \exp(-1) = e^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{e}}$.

b) $(\exp(x^2))^3 = (e^{x^2})^3 = e^{x^2 \times 3} = \boxed{e^{3x^2}}$.

c) $\exp(1)\exp(2)\exp(3)\exp(4) = \exp(1+2+3+4) = \boxed{\exp(10)}$.

Exercice 26. Simplifier

a) $\ln(x^2+x) - \ln(x)$ b) $\ln(5x^2) - 2\ln(x)$

c) $\exp(2\ln(x))$ d) $4\ln(\sqrt{x})$.

Corrigé.

a) $\ln(x^2+x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x^2+x}{x}\right) = \ln\left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}\right) = \boxed{\ln(x+1)}$.

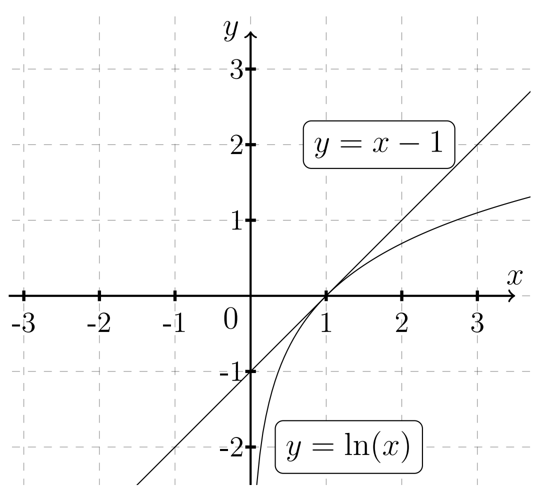
b) $\ln(5x^2) - 2\ln(x) = \ln(5) + \ln(x^2) - 2\ln(x) = \ln(5) + 2\ln(x) - 2\ln(x) = \boxed{\ln(5)}$.

c) $\exp(2\ln(x)) = \exp(\ln(x^2)) = \boxed{x^2}$.

d) $4\ln(\sqrt{x}) = \ln((\sqrt{x})^4) = \ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \boxed{\ln(x^2)} = \boxed{2\ln(x)}$.

Exercice 27. Démontrer l'inégalité suivante : pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln(x) \leqslant x - 1$. Faire un dessin illustrant cette inégalité.

Corrigé.



L'inégalité à démontrer est équivalente à la suivante :

$$\ln(x) \leqslant x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(x) - x + 1 \leqslant 0.$$

On pose la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x) - x + 1$ pour tout $x \in \,]0, +\infty[$.
Cette fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée vaut : $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

On trace le tableau de signe de f', et on en déduit le tableau de variations de f.

	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

car $f(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$.

On déduit de ce tableau de variations que pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $f(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\ln(x) - x + 1 \leqslant 0$, donc $\ln(x) \leqslant x - 1$.

Remarque : le tableau montre que $f(1) = 0$ et $f(x) < 0$ pour tout $x \neq 1$; par conséquent, la courbe de ln est strictement en-dessous de la droite d'équation $y = x - 1$, sauf au point d'abscisse 1 où les deux courbes se croisent. C'est bien cohérent avec le graphique.

Exercice 28. Résoudre l'inéquation $e^{2x} \leqslant 5$, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des nombres réels x qui vérifient cette inégalité.

Corrigé. *L'objectif est d'isoler x. Pour réussir à "enlever" l'exponentielle, on compose par la fonction* ln.

$$\begin{aligned} e^{2x} \leqslant 5 \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln(e^{2x}) \leqslant \ln(5) \quad \text{car la fonction ln est croissante sur }]0, +\infty[\\ &\Longleftrightarrow \quad 2x \leqslant \ln(5) \\ &\Longleftrightarrow \quad x \leqslant \frac{\ln(5)}{2} \quad \text{diviser par 2 ne change pas le sens de l'inégalité.} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{2x} \leqslant 5$ est l'intervalle $\left]-\infty, \frac{\ln(5)}{2}\right]$.

Thème 6 : Les puissances

Exercice 29. Vrai ou faux ? Si vous répondez faux, donnez un contre-exemple.

a) $\sqrt{60}$ appartient à l'intervalle $[7;8]$.

b) Pour tous $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $x^{1-n} = \frac{1}{x^{1+n}}$.

c) Pour tous $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $x^{3-2n} = \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-3}$.

d) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $6^\alpha = 2^\alpha \times 3^\alpha$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $25^n = 5^{2n}$.

f) Pour tous $x, y \in [0, +\infty[$, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Corrigé.

a) **Vrai**. En effet, $7^2 = 49$ et $8^2 = 64$. On en déduit que $\sqrt{49} = 7$ et $\sqrt{64} = 8$. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, $\sqrt{60}$ est compris entre $\sqrt{49}$ et $\sqrt{64}$, c'est-à-dire entre 7 et 8.

b) **Faux**. Prenons le contre-exemple suivant : $x = 2$ et $n = 1$. Alors

$$x^{1-n} = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$
$$\frac{1}{x^{1+n}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

donc $x^{1-n} \neq \frac{1}{x^{1+n}}$.
Remarque : $\frac{1}{x^{1+n}} = (x^{-1})^{1+n} = x^{-1-n}$.

c) **Vrai**. En effet,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{2n-3} = (x^{-1})^{2n-3} = x^{(-1)\times(2n-3)} = x^{-2n+3} = x^{3-2n}.$$

d) **Vrai**. En effet,

$$6^\alpha = (2 \times 3)^\alpha = 2^\alpha \times 3^\alpha.$$

e) **Vrai**. En effet,

$$5^{2n} = (5^2)^n = 25^n.$$

f) **Faux**. Prenons le contre-exemple suivant : $x = 1$ et $y = 1$:

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$$

donc $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exercice 30. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{1}{4^n} + \dfrac{1}{4^{n+1}}$ b) $\dfrac{5^{n^2}}{3 \times 5^n}$ c) $\dfrac{6^n}{2 \times 6^{2n}}$.

Corrigé.

a) On met au même dénominateur :

$$\frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{4}{4^n \times 4} + \frac{1}{4^{n+1}} = \boxed{\frac{5}{4^{n+1}}}.$$

b) $\dfrac{5^{n^2}}{3 \times 5^n} = \dfrac{5^{n^2-n}}{3} = \boxed{\dfrac{5^{n(n-1)}}{3}}$.

c) $\dfrac{6^n}{2 \times 6^{2n}} = \dfrac{6^{n-2n}}{2} = \dfrac{6^{-n}}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2 \times 6^n}}$.

Exercice 31. Tableau des puissances de 3 :

$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$
$3^6 = 729$	$3^7 = 2187$	$3^8 = 6561$	$3^9 = 19683$	$3^{10} = 59049$

En s'aidant du formulaire ci-dessus, calculer les six expressions suivantes

3^{2^3} 3^{-7} $\dfrac{3^2}{3^7}$ $(-3)^{-3} \times (-3)^9$ 9^5 27^2.

Corrigé. On sait que $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ donc

$$3^{2^3} = 3^8 = \boxed{6561}$$
$$3^{-7} = \frac{1}{3^7} = \boxed{\frac{1}{2187}}$$
$$\frac{3^2}{3^7} = 3^{2-7} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \boxed{\frac{1}{243}}$$
$$(-3)^{-3} \times (-3)^9 = (-3)^{-3+9} = (-3)^6 = (-1)^6 \times 3^6 = 1 \times 729 = \boxed{729}$$
$$9^5 = (3^2)^5 = 3^{2\times 5} = 3^{10} = \boxed{59049}$$
$$27^2 = (3^3)^2 = 3^{3\times 2} = 3^6 = \boxed{729}.$$

Exercice 32. Soit $x > 4$. Justifier que l'expression ci-dessous est bien définie, puis la simplifier.

$$2\ln\left(\sqrt{(x-4)x}\right) - \ln(x-4).$$

Corrigé. Si $x > 4$, alors $x - 4 > 0$ donc $\ln(x-4)$ est bien définie. De plus, $(x-4)x > 0$ donc $\sqrt{(x-4)x}$ est bien défini et strictement positif, donc $\ln\left(\sqrt{(x-4)x}\right)$ est bien définie. Ainsi, l'expression $2\ln\left(\sqrt{(x-4)x}\right) - \ln(x-4)$ est bien définie. De plus

$$\begin{aligned}
2\ln\left(\sqrt{(x-4)x}\right) - \ln(x-4) &= 2\ln\left(((x-4)x)^{1/2}\right) - \ln(x-4)\\
&= 2\times\frac{1}{2}\ln((x-4)x) - \ln(x-4)\\
&= \ln((x-4)x) - \ln(x-4)\\
&= \ln(x-4) + \ln(x) - \ln(x-4)\\
&= \boxed{\ln(x)}.
\end{aligned}$$

Thème 7 : Calcul de dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

Exercice 33. $f(x) = \dfrac{x^5}{10} - 3x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - 3x^2$.
On en déduit que $f'(x) = \frac{1}{10} \times 5x^4 - 3 \times 2x = \boxed{\dfrac{1}{2}x^4 - 6x}$.

Exercice 34. $g(x) = x^2 \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corrigé. On applique la formule de dérivation d'un produit :
$g'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = \boxed{2x\ln(x) + x}$.

Exercice 35. $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^3}$ sur $]-\infty, 0[$.

Corrigé. On applique la formule de dérivation d'un quotient :

$$\begin{aligned} h'(x) = \frac{\cos(x)x^3 - \sin(x) \times 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{\cos(x)x^3 - 3\sin(x)x^2}{x^6} &= \frac{x^2(x\cos(x) - 3\sin(x))}{x^6} \\ &= \boxed{\frac{x\cos(x) - 3\sin(x)}{x^4}}. \end{aligned}$$

Exercice 36. $f(x) = \sqrt{\exp(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. On pose $u(x) = \exp(x)$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On obtient alors

$$f(x) = \sqrt{u(x)} = v(u(x)) = v \circ u(x).$$

Or $u'(x) = \exp(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc

$$f'(x) = u'(x)v'(u(x)) = \exp(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\exp(x)}{2\sqrt{\exp(x)}} = \boxed{\frac{\sqrt{\exp(x)}}{2}}.$$

Exercice 37. $g(x) = \ln(2x^2 + 5x + 2)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corrigé. On pose $u(x) = 2x^2 + 5x + 2$ et $v(x) = \ln(x)$. On obtient alors

$$g(x) = \ln(u(x)) = v(u(x)).$$

Or $u'(x) = 4x + 5$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$, donc

$$g'(x) = u'(x)v'(u(x)) = (4x+5) \times \frac{1}{2x^2+5x+2} = \boxed{\frac{4x+5}{2x^2+5x+2}}.$$

Exercice 38. $h(x) = \dfrac{1}{(2+\cos(x))^3}$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé. On pose $u(x) = 2 + \cos(x)$ et $v(x) = \frac{1}{x^3}$. On obtient alors

$$h(x) = \frac{1}{u(x)^3} = v(u(x)).$$

Or $u'(x) = 0 - \sin(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = \frac{-3}{x^4}$ donc

$$h'(x) = u'(x)v'(u(x)) = -\sin(x) \times \frac{(-3)}{(2+\cos(x))^4} = \boxed{\frac{3\sin(x)}{(2+\cos(x))^4}}.$$